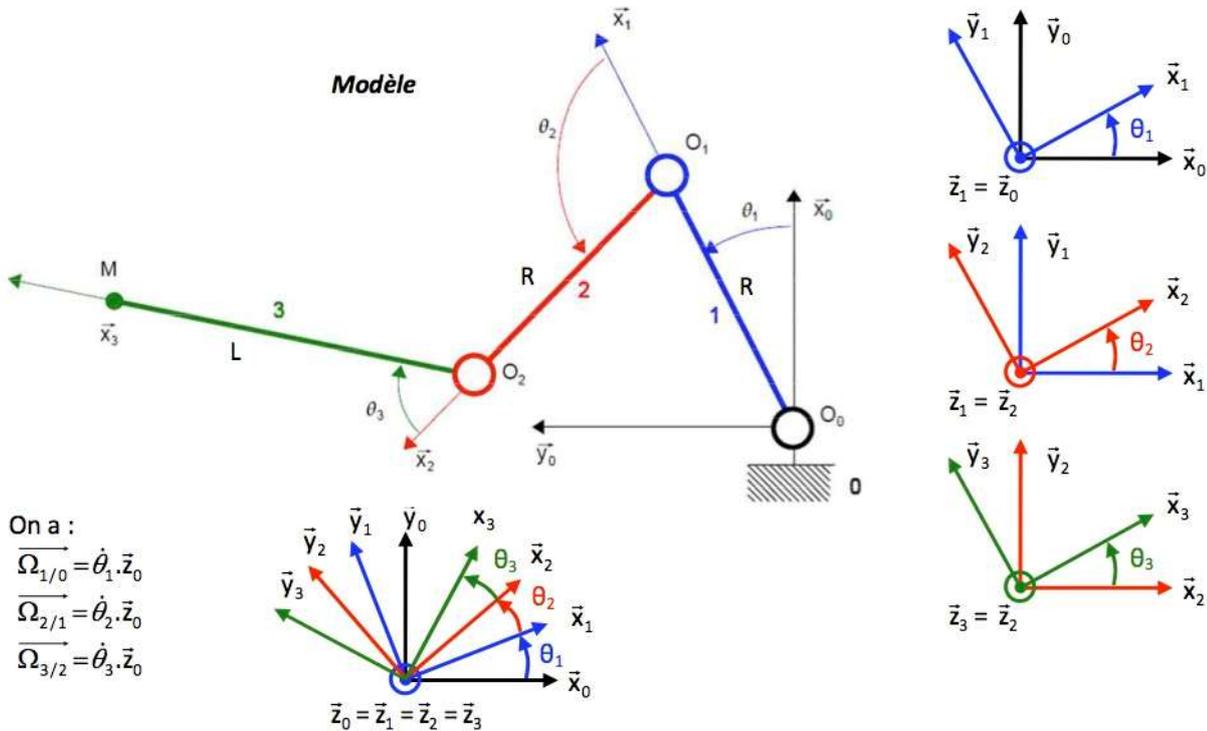


CORRIGÉ

Exercice 1 : Robot cueilleur de fruits



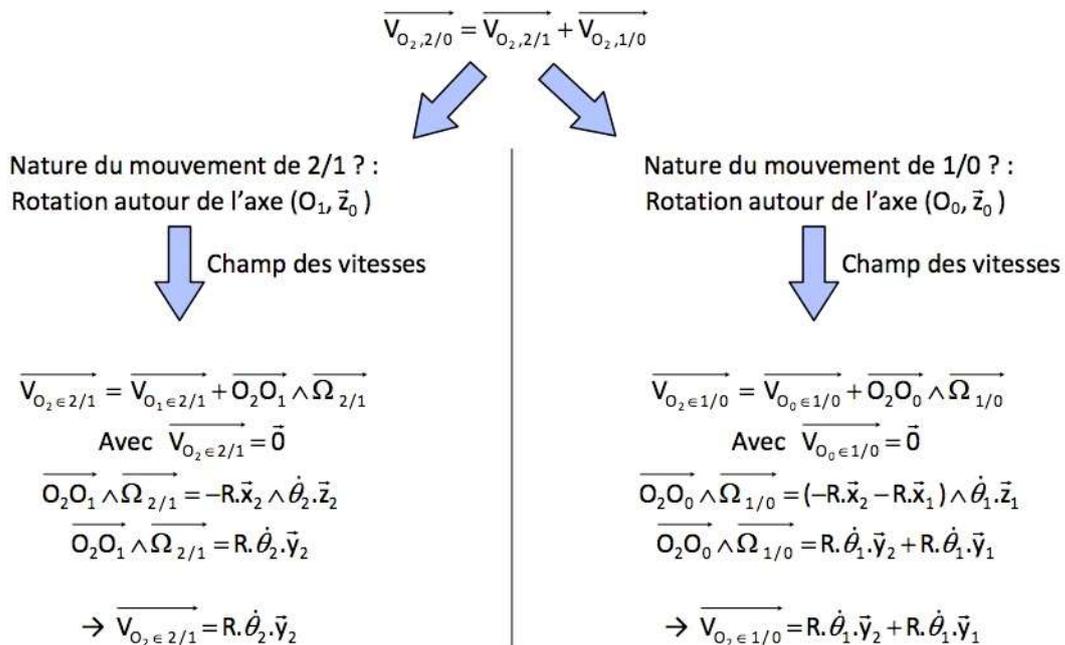
Q.1. Nature du mouvement de 1/0 ? : Mouvement de rotation simple autour de l'axe (O_0, \vec{z}_0) :

On applique le champ des vitesses : $\overrightarrow{V}_{O_1 \in 1/0} = \overrightarrow{V}_{O_0 \in 1/0} + \overrightarrow{O_1 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{1/0}$

Avec $\overrightarrow{V}_{O_0 \in 1/0} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{O_1 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = -R \cdot \vec{x}_1 \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 \rightarrow \overrightarrow{V}_{O_1 \in 1/0} = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1$

Q.2. Nature du mouvement de 2/0 ? : Mouvement complexe, on décompose en mouvements simples :

$\rightarrow 2/0 = 2/1 + 1/0 \rightarrow \overrightarrow{V}_{O_2, 2/0} = \overrightarrow{V}_{O_2, 2/1} + \overrightarrow{V}_{O_2, 1/0}$ (composition de mouvement)



$$\rightarrow \overrightarrow{V_{O_2 \in 2/0}} = R \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2 + R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1$$

Q.3. Nature du mouvement de 3/0 ? : Mouvement complexe, on décompose en mouvements simples :

$$\rightarrow 3/0 = 3/2 + 2/1 + 1/0 \rightarrow \overrightarrow{V_{M,3/0}} = \overrightarrow{V_{M,3/2}} + \overrightarrow{V_{M,2/1}} + \overrightarrow{V_{M,1/0}} \quad (\text{composition de mouvement})$$

$$\overrightarrow{V_{M,3/0}} = \overrightarrow{V_{M,3/2}} + \overrightarrow{V_{M,2/1}} + \overrightarrow{V_{M,1/0}}$$

Nature du mouvement de 3/2 ? :
Rotation autour de l'axe (O_2, \vec{z}_0)



$$\overrightarrow{V_{M \in 3/2}} = \overrightarrow{V_{O_2 \in 3/2}} + \overrightarrow{MO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}}$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{V_{O_2 \in 3/2}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = -L \cdot \vec{x}_3 \wedge \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_3$$

$$\overrightarrow{MO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = L \dot{\theta}_3 \cdot \vec{y}_3$$

$$\rightarrow \overrightarrow{V_{M \in 3/2}} = L \dot{\theta}_3 \cdot \vec{y}_3$$

Nature du mouvement de 2/1 ? :
Rotation autour de l'axe (O_1, \vec{z}_0)



$$\overrightarrow{V_{M \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{O_1 \in 2/1}} + \overrightarrow{MO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{V_{O_1 \in 2/1}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = (-L \cdot \vec{x}_3 - R \cdot \vec{x}_2) \wedge \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{MO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = L \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{y}_3 + R \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{y}_2$$

$$\rightarrow \overrightarrow{V_{O_2 \in 2/1}} = R \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{y}_2$$

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe (O_0, \vec{z}_0)



$$\overrightarrow{V_{M \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_0 \in 1/0}} + \overrightarrow{MO_0} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{V_{O_0 \in 1/0}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MO_0} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = (-L \cdot \vec{x}_3 - R \cdot \vec{x}_2 - R \cdot \vec{x}_1) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1$$

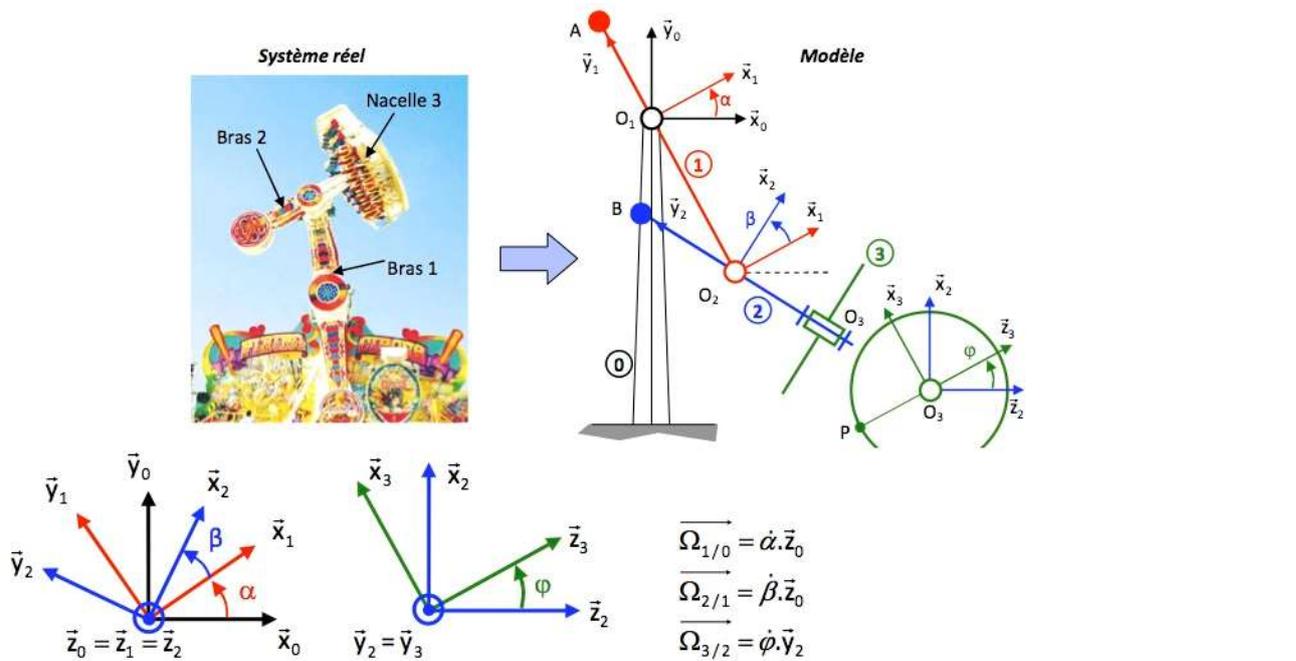
$$\overrightarrow{MO_0} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = L \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_3 + R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_2 + R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1$$

$$\rightarrow \overrightarrow{V_{M \in 1/0}} = L \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_3 + R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_2 + R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1$$

$$\rightarrow \overrightarrow{V_{M,3/0}} = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2 + L \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{y}_3$$

Q.4. Les résultats obtenus par calcul direct (TD 11) et ceux obtenus ici par champ des vitesses + composition de mouvement sont (bien évidemment) les mêmes (ce qui est plutôt rassurant ^^).

Exercice 2 : Manège Magic Arms



Q.1. Nature du mouvement de 3/0 ? : Mouvement complexe, on décompose en mouvements simples :

$\rightarrow 3/0 = 3/2 + 2/1 + 1/0 \rightarrow \vec{V}_{P,3/0} = \vec{V}_{P,3/2} + \vec{V}_{P,2/1} + \vec{V}_{P,1/0}$ (composition de mouvement)

$\vec{V}_{P,3/0} = \vec{V}_{P,3/2} + \vec{V}_{P,2/1} + \vec{V}_{P,1/0}$

Nature du mouvement de 3/2 ? :
Rotation autour de l'axe (O_3, \vec{x}_1)

↓
Champ des vitesses

$\vec{V}_{P \in 3/2} = \vec{V}_{O_3 \in 3/2} + \vec{PO}_3 \wedge \vec{\Omega}_{3/2}$
 Avec $\vec{V}_{O_3 \in 3/2} = \vec{0}$
 $\vec{PO}_3 \wedge \vec{\Omega}_{3/2} = R \cdot \vec{z}_3 \wedge \dot{\phi} \cdot \vec{y}_3$
 $\vec{PO}_3 \wedge \vec{\Omega}_{3/2} = -R \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{x}_3$
 $\rightarrow \vec{V}_{P \in 3/2} = -R \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{x}_3$

Nature du mouvement de 2/1 ? :
Rotation autour de l'axe (O_2, \vec{z}_1)

↓
Champ des vitesses

$\vec{V}_{P \in 2/1} = \vec{V}_{O_2 \in 2/1} + \vec{PO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$
 Avec $\vec{V}_{O_2 \in 2/1} = \vec{0}$
 $\vec{PO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = (R \cdot \vec{z}_3 + l_2 \cdot \vec{y}_2) \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2$
 $\vec{PO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -R \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \phi \cdot \vec{y}_2 + l_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2$
 $\rightarrow \vec{V}_{P \in 2/1} = -R \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \phi \cdot \vec{y}_2 + l_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2$

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe (O_1, \vec{z}_1)

↓
Champ des vitesses

$\vec{V}_{P \in 1/0} = \vec{V}_{O_1 \in 1/0} + \vec{PO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$
 Avec $\vec{V}_{O_1 \in 1/0} = \vec{0}$
 $\vec{PO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = (R \cdot \vec{z}_3 + l_2 \cdot \vec{y}_2 + l_1 \cdot \vec{y}_1) \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_2$
 $\vec{PO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -R \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \phi \cdot \vec{y}_2 + l_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_2 + l_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1$
 $\rightarrow \vec{V}_{P \in 1/0} = -R \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \phi \cdot \vec{y}_2 + l_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_2 + l_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1$

$\rightarrow \vec{V}_{P,3/0} = l_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + l_2 \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot \vec{x}_2 - R \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot \sin \phi \cdot \vec{y}_2 - R \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{x}_3$

Exercice 3 : Centre d'usinage grande vitesse 5 axes

Q.1. $\vec{O}_3\vec{O}_5 = \vec{O}_3\vec{O}_4 + \vec{O}_4\vec{D} + \vec{D}\vec{O}_5 = y \cdot \vec{y}_3 + l_3 \cdot \vec{z}_3 + l_4 \cdot \vec{x}_4 + z \cdot \vec{z}_5 = l_4 \cdot \vec{x}_3 + y \cdot \vec{y}_3 + (z + l_3) \cdot \vec{z}_3$

Q.2. Le point O_5 extrémité de l'outil se déplace dans le plan $x(t) = cte = l_4$

Q.3. $\vec{V}_{O_5 \in 5/3} = \vec{V}_{O_5/3} = \frac{d}{dt} \vec{O}_3\vec{O}_5 \Big|_3 = \frac{d}{dt} l_4 \cdot \vec{x}_3 + y \cdot \vec{y}_3 + (z + l_3) \cdot \vec{z}_3 = \dot{y} \cdot \vec{y}_3 + \dot{z} \cdot \vec{z}_3$

(O_5 a une réalité physique sur le solide 5, on peut appliquer le calcul direct).

Q.4. $\|\vec{V}_{O_5 \in 5/3}\| = \sqrt{(\dot{y} \cdot \vec{y}_3 + \dot{z} \cdot \vec{z}_3)^2} = \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

On a vitesse maximale sur l'axe Y : 40 m/min et vitesse maximale sur l'axe Z : 40 m/min.

$\rightarrow \|\vec{V}_{O_5 \in 5/3}\| = \sqrt{40^2 + 40^2} = 56.5 \text{ m/min.}$

Q.5. Le point O_0 se déplace dans le plan $y(t) = cte = l_1$.

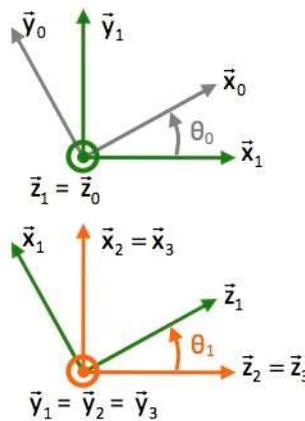
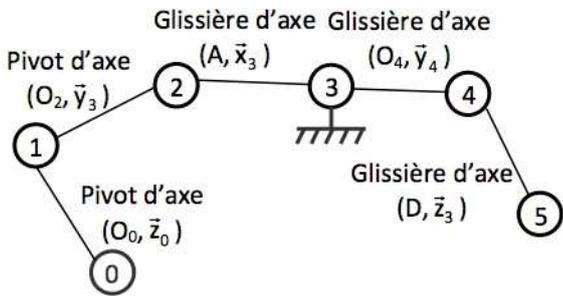
Q.6. $\vec{V}_{O_0 \in 0/3} = \vec{V}_{O_0/3} = \frac{d}{dt} \vec{O}_3\vec{O}_0 \Big|_3 = \frac{d}{dt} (x \cdot \vec{x}_3 + l_2 \cdot \vec{z}_3 - l_1 \cdot \vec{y}_3 + l_0 \cdot \vec{z}_1) \Big|_3 = \dot{x} \cdot \vec{x}_3 + l_0 \cdot \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \Big|_3 = \dot{x} \cdot \vec{x}_3 + l_0 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1$

(O_0 a une réalité physique sur le solide 0, on peut appliquer le calcul direct).

Q.7. $l_0 = 0,1\text{m}$ et $\dot{x} = 0 \rightarrow \vec{V}_{O_0 \in 0/3} = 0,1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1 \rightarrow \|\vec{V}_{O_0 \in 0/3}\| = 0,1 \cdot \dot{\theta}_1 \text{ m/s.}$

Avec $\dot{\theta}_1 = \frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot 150 = 15,7 \text{ rad/s} \rightarrow \|\vec{V}_{O_0 \in 0/3}\| = 1,57 \text{ m/s.}$

Q.8.



Q.9. $\vec{\Omega}_{S0/R3} = \vec{\Omega}_{0/3} = \vec{\Omega}_{0/1} + \vec{\Omega}_{1/2} + \vec{\Omega}_{2/3} = \dot{\theta}_0 \cdot \vec{z}_1 + \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1$

Q.10. $\vec{V}_{M \in 0/3} = \vec{V}_{O_0 \in 0/3} + \vec{M}\vec{O}_0 \wedge \vec{\Omega}_{0/3}$ (Champ des vecteurs vitesse).

Avec $\vec{M}\vec{O}_0 \wedge \vec{\Omega}_{0/3} = -(x_M \cdot \vec{x}_0 + y_M \cdot \vec{y}_0 + z_M \cdot \vec{z}_0) \wedge (\dot{\theta}_0 \cdot \vec{z}_0 + \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1)$

$\rightarrow \vec{M}\vec{O}_0 \wedge \vec{\Omega}_{0/3} = -(x_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \vec{y}_0 + y_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \vec{x}_0 + x_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_0 \cdot \vec{z}_0 - y_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_0 \cdot \vec{z}_0 - z_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1)$

$\rightarrow \vec{M}\vec{O}_0 \wedge \vec{\Omega}_{0/3} = x_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \vec{y}_0 - y_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \vec{x}_0 - x_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_0 \cdot \vec{z}_0 + y_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_0 \cdot \vec{z}_0 + z_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1$

D'où : $\vec{V}_{M \in 0/3} \cdot \vec{y}_3 = (\dot{x} \cdot \vec{x}_3 + l_0 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1 + x_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \vec{y}_0 - y_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \vec{x}_0 - x_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_0 \cdot \vec{z}_0 + y_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_0 \cdot \vec{z}_0 + z_M \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1) \cdot \vec{y}_3$

$\rightarrow \vec{V}_{M \in 0/3} \cdot \vec{y}_3 = x_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \cos \theta_0 - y_M \cdot \dot{\theta}_0 \cdot \sin \theta_0$

Q.11. $\overrightarrow{V_{O_5 \in 5/3}} = \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}} + \overrightarrow{V_{O_5 \in 0/3}}$ (Composition de mouvement).

Et $\overrightarrow{V_{O_5 \in 0/3}} = \overrightarrow{V_{M \in 0/3}} + \overrightarrow{O_5 M} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S0/R3}}$ (Champ des vecteurs vitesse).

D'où : $\overrightarrow{V_{O_5 \in 5/3}} = \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}} + \overrightarrow{V_{M \in 0/3}} + \overrightarrow{O_5 M} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S0/R3}}$

Q.12. O_5 se déplace sur la surface usinée des points M : O_5 et M sont des points coïncidents de contact.

$\overrightarrow{V_{O_5 \in 5/3}} = \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}} + \overrightarrow{V_{M \in 0/3}} + \overrightarrow{O_5 M} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S0/R3}}$ devient : $\overrightarrow{V_{O_5 \in 5/3}} = \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}} + \overrightarrow{V_{M \in 0/3}}$

Q.13. Le cahier des charges impose une vitesse d'usinage constante. La relation de la question 12 devient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}} &= \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/3}} - \overrightarrow{V_{M \in 0/3}} \\ \rightarrow \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}} &= \dot{y} \cdot \vec{y}_3 + \dot{z} \cdot \vec{z}_3 - (v_{x_M} \cdot \vec{x}_3 + v_{y_M} \cdot \vec{y}_3 + v_{z_M} \cdot \vec{z}_3) \\ \rightarrow \overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}} &= -v_{x_M} \cdot \vec{x}_3 + (\dot{y} - v_{y_M}) \cdot \vec{y}_3 + (\dot{z} - v_{z_M}) \cdot \vec{z}_3 \\ \rightarrow \|\overrightarrow{V_{O_5 \in 5/0}}\| &= \sqrt{v_{x_M}^2 + (\dot{y} - v_{y_M})^2 + (\dot{z} - v_{z_M})^2} \end{aligned}$$

Pour respecter le cahier des charges il faut donc que : $\sqrt{v_{x_M}^2 + (\dot{y} - v_{y_M})^2 + (\dot{z} - v_{z_M})^2} = cte$

Exercice 4 : Validation des performances de l'hélicoptère Écureuil

Q.1. $\left\{ \overrightarrow{V_{1/0}} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A,1/0}} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V \cdot \vec{x}_0} = \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_A$ et $\left\{ \overrightarrow{V_{2/1}} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A,2/1}} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 = \omega \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

Q.2. $\left\{ \overrightarrow{V_{2/0}} \right\}_A = \left\{ \overrightarrow{V_{2/1}} \right\}_A + \left\{ \overrightarrow{V_{1/0}} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 = \omega \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A + \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V \cdot \vec{x}_0} = \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \omega \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V \cdot \vec{x}_0} \end{matrix} \right\}_A \rightarrow \left\{ \overrightarrow{V_{2/0}} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \omega \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V \cdot \vec{x}_0} \end{matrix} \right\}_A$

Q.3. $\overrightarrow{V_{M \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/0}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = V \cdot \vec{x}_0 - R \cdot \vec{x}_2 \wedge \omega \cdot \vec{z}_0 = V \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \omega \cdot \vec{y}_2 \rightarrow \overrightarrow{V_{M \in 2/0}} = V \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \omega \cdot \vec{y}_2$

Q.4. $\overrightarrow{V_{M \in 2/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \Big|_0 = \frac{d}{dt} h \cdot \vec{z}_0 + \lambda(t) \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{x}_2 \Big|_0 = V \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \omega \cdot \vec{y}_2 \rightarrow \overrightarrow{V_{M \in 2/0}} = V \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \omega \cdot \vec{y}_2$

Q.5. $\|\overrightarrow{V_{M \in 2/0}}\| = \sqrt{\overrightarrow{V_{M \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in 2/0}}} = \sqrt{V^2 + R^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot V \cdot R \cdot \omega \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_2}$ avec $\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_2 = -\sin \theta$

$V_{\max} = \sqrt{V^2 + R^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot V \cdot R \cdot \omega}$ est obtenue pour $-\sin \theta = 1$ soit lorsque $\vec{x}_2 = -\vec{y}_0$

Q.6. Application numérique : $V_{\max} = \sqrt{\left(\frac{290000}{3600}\right)^2 + 5,1^2 \times 38,7^2 + 2 \cdot \frac{290000}{3600} \times 5,1 \times 38,7}$

$V_{\max} = \sqrt{\left(\frac{290000}{3600}\right)^2 + 5,1^2 \times 38,7^2 + 2 \cdot \frac{290000}{3600} \times 5,1 \times 38,7} = 278 \text{ m/s}$ soit $V_{\max} = 1000 \text{ km/h}$

Q.7. Vitesse du son : 340 m/s \rightarrow 85% de 340 m/s = 289 m/s > 278 m/s \rightarrow C.d.C.F. respecté.