COURS

1) Citer les deux types d'actions mécaniques auxquelles peut être soumis un solide dans un mécanisme. Donner un exemple dans chacun des 2 cas.
2) Donner l'expression du torseur d'une **action mécanique élémentaire exercée par un fluide sur un élément de surface dS de centre M d'une paroi**.

   Faire un schéma en indiquant les éléments suivants : le point M, $dS, \vec{n}, d\vec{F}_{fluide \to paroi}$.

EXERCICE

On s'intéresse aux actions mécaniques auxquelles est soumis un hélicoptère en vol :

L'hélicoptère de **masse m** proposé évolue horizontalement à vitesse constante suivant l'axe $(O, \vec{x})$; l'axe $(O, \vec{z})$ est vertical.

- $\vec{F}$ et $\vec{M}$ schématisent les actions exercées par l'air sur les pales du rotor principal,
- $\vec{M_Q}$ et $\vec{Q}$ sont les actions sur le rotor anti-couple,
- $\vec{R}$ est la résistance de l'air sur l'ensemble de l'appareil,
- $\vec{P}$ est le poids de l'appareil.

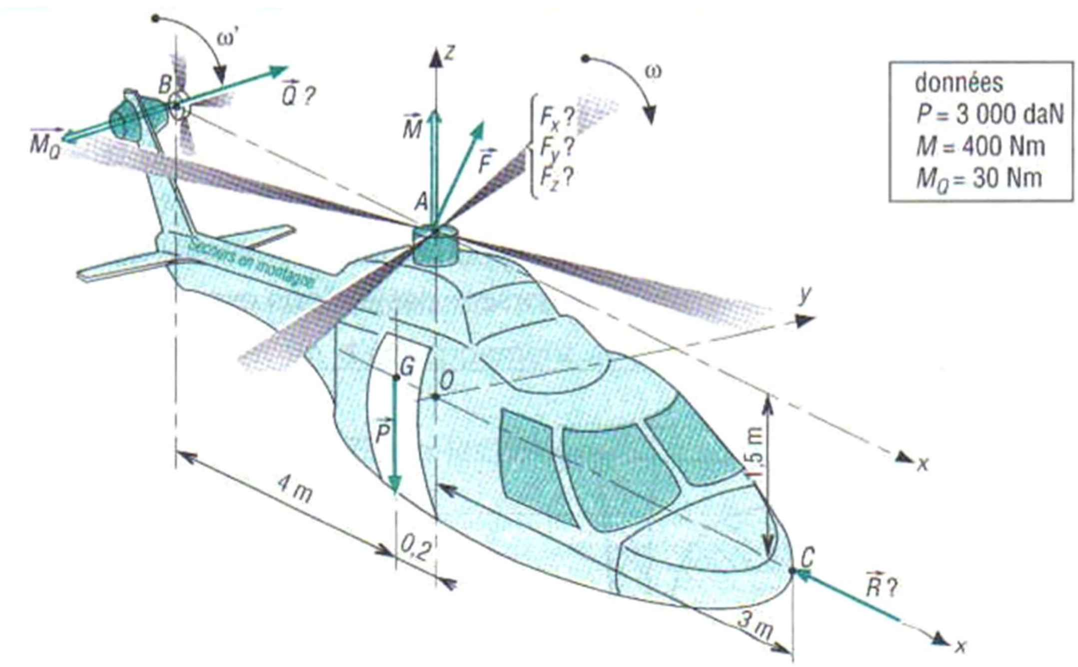
Question 1 : Parmi les actions décrites ci-dessus, citer une action à distance et une action de contact.

Tous les torseurs suivants sont demandés dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

Question 2 : Écrire le torseur de l'action de pesanteur appliquée à l'appareil au point G.
Quel est le nom de ce point ?

Question 3 : Écrire le torseur des actions de l'air sur les pales au point A.

Question 4 : Écrire le torseur des actions de l'air sur le rotor anti-couple au point B.
Déplacer ce torseur au point A.



COURS

1) Citer les deux types d'actions mécaniques auxquelles peut être soumis un solide dans un mécanisme. Donner un exemple dans chacun des 2 cas.
2) Donner l'expression du torseur d'une **action mécanique <u>élémentaire</u> exercée par un fluide sur un élément de surface dS de centre M d'une paroi**.

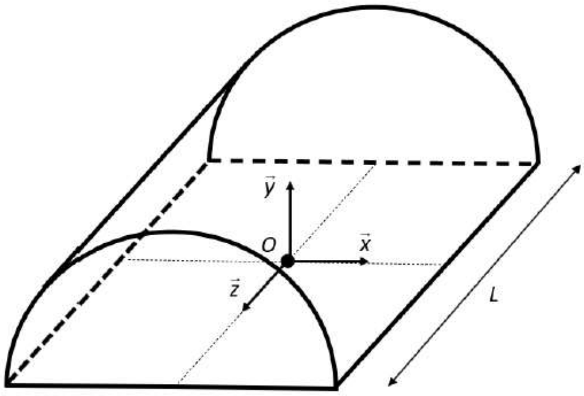
   Faire un schéma en indiquant les éléments suivants : le point M, $dS, \vec{n}, d\vec{F}_{fluide \to paroi}$.

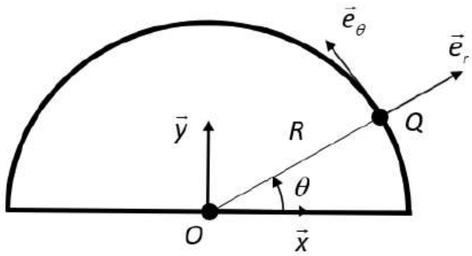
EXERCICE

Le Rangali Island est un restaurant dans les Maldives proposant une salle sous-marine **(voir vidéo de présentation sur le site internet)**.

On suppose que les baies vitrées ont une structure cylindrique de rayon constant *R* et de longueur *L*.
Nous négligerons la variation de pression entre le haut et le bas des baies vitrées et supposerons qu'elle est constante avec $p = p_0 + \rho g h$ ou ρ est la masse volumique de l'eau, *g* l'accélération de la pesanteur, *h* la profondeur et p_0 la pression atmosphérique.

ρ = 1000 kg.m^{-3} ; g = 9,81 m.s^{-2} ; h = 10 m ; p_0 = 101 325 Pa ; R = 2,5 m ; L= 15 m





Objectif : déterminer le torseur de l'action de l'eau sur les baies vitrées dans le but de dimensionner la structure supportant celles-ci.

1. Représenter sur le schéma plan ci-dessus, le champ des forces élémentaires de pression $d\vec{N}_{eau \to baies}$.
2. Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{eau \to baies}(Q)$ de l'eau sur les baies en un point Q, en fonction de p et ds.
3. Déterminer la résultante d'action globale de l'eau sur les baies $\vec{R}_{eau \to baies}$.

La surface projetée des baies est le rectangle de surface $S_{projetée} = 2RL$.

4. Exprimer $\left\| \vec{R}_{eau \to baies} \right\|$ en fonction de $S_{projetée}$.
5. Déterminer le moment de l'action globale de l'eau sur les baies en $O, \vec{M}_{O,eau \to baies}$.

COURS

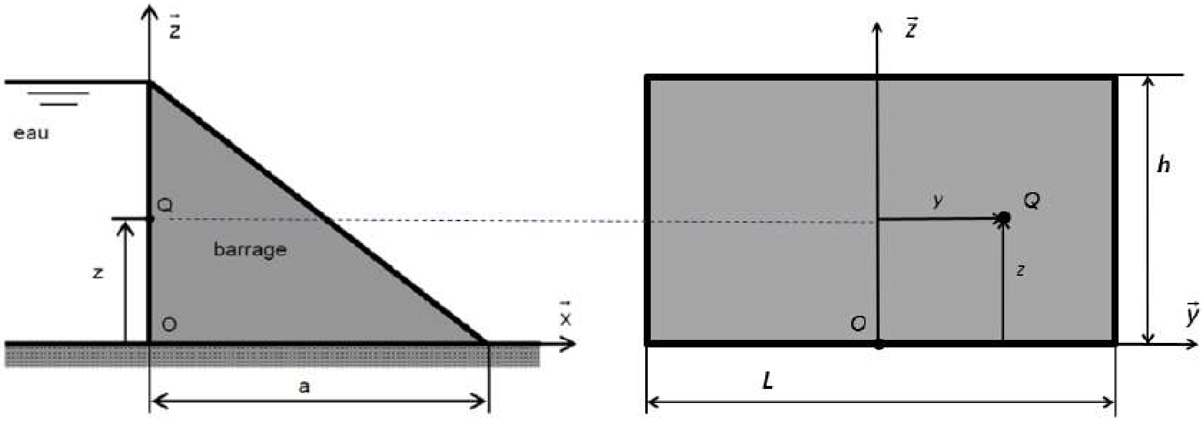
1) Citer les deux types d'actions mécaniques auxquelles peut être soumis un solide dans un mécanisme. Donner un exemple dans chacun des 2 cas.

EXERCICE

Un barrage poids est un barrage dont la propre masse suffit à résister à la pression exercée par l'eau. Le barrage est soumis principalement à l'action mécanique de l'eau (pression hydrostatique) et à l'action mécanique de la pesanteur **(voir vidéo du fonctionnement d'une centrale hydraulique sur le site internet).**

On modélise le barrage poids par le schéma ci-dessous :
Le point O est situé dans le plan médian du barrage.
Les caractéristiques du barrage sont :

- M, masse du barrage considéré comme un solide homogène ;
- section triangulaire ;
- a = 20 m, assise du barrage ;
- h = 25 m, hauteur d'eau retenue ;
- L = 80 m, largeur du barrage ;
- ρ_{eau} = 1000 kg/m³, masse volumique de l'eau.



La pression p sur un élément de surface d'un corps immergé dans l'eau est directement liée à la profondeur à laquelle est immergée ce corps : $\boxed{p = p_0 + \rho_{eau} \times g \times profondeur}$ avec p_0 la pression atmosphérique.

Objectif : vérifier le critère de l'exigence « poussée maxi de l'eau $300\,10^6$ N ».

1. Représenter sur le schéma ci-dessus, le champ des forces élémentaires de pression $dN_{eau \rightarrow barrage}$.
2. Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{eau \rightarrow barrage}(Q)$ de l'eau sur le barrage en un point Q, en fonction de p et ds, puis en fonction de p_0, ρ_{eau}, g, h, z et ds.
3. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage.
4. En déduire les coordonnées y_A et z_A du centre de poussée A : point où ou le moment résultant de l'action mécanique de l'eau sur le barrage est nul : $\vec{M}_{A,eau \rightarrow barrage} = \vec{0}$.
5. Vérifier le critère de l'exigence « poussée maxi de l'eau $300\,10^6$ N ».

COURS

2) Citer les deux types d'actions mécaniques auxquelles peut être soumis un solide dans un mécanisme. Donner un exemple dans chacun des 2 cas.
De <u>contact</u> (ou surfaciques), par exemple l'action d'un fluide sur une paroi, et <u>à distance</u> (ou volumiques), par exemple les actions de pesanteur.

2) Donner l'expression du torseur d'une **action mécanique <u>élémentaire</u> exercée par un fluide sur un élément de surface dS d'une paroi**. $\{dT_{fluide\to paroi}\} = \begin{Bmatrix} d\vec{F}_{fluide\to paroi} = -p(M).dS.\vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$

Faire un schéma en indiquant les grandeurs suivantes : $dS, \vec{n}, d\vec{F}_{fluide\to paroi}$.

EXERCICE 1

On s'intéresse aux actions mécaniques auxquelles est soumis un hélicoptère en vol :

L'hélicoptère proposé évolue horizontalement à vitesse constante suivant l'axe $(O,\vec{x})$; l'axe $(O,\vec{z})$ est vertical.

- $\vec{F}$ et $\vec{M}$ schématisent les actions exercées par l'air sur les pales du rotor principal,
- $\vec{M_Q}$ et $\vec{Q}$ sont les actions sur le rotor anti-couple,
- $\vec{R}$ est la résistance de l'air sur l'ensemble de l'appareil,
- $\vec{P}$ est le poids de l'appareil.

Question 1 : Parmi les actions décrites ci-dessus, citer une action à distance et une action de contact.

Question 2 : Écrire le torseur de l'action de pesanteur appliquée à l'appareil au point G.

$$\{T_{pes\to app}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Quel est le nom de ce point ? ***Centre de gravité.***

Question 3 : Écrire le torseur des actions de l'air sur les pales au point A. $\{T_{air\to pales}\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{Bmatrix}_A$

Question 4 : Écrire le torseur des actions de l'air sur le rotor anti-couple au point B.

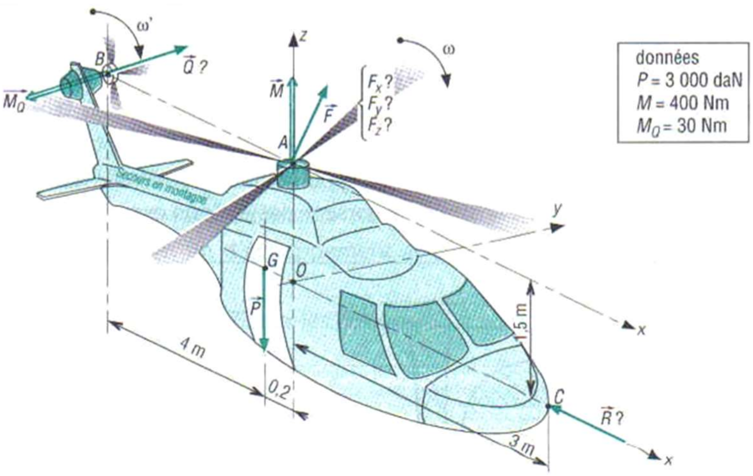
$$\{T_{air\to rotAC}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$$

Déplacer ce torseur au point A.

Relation de Varignon : $\vec{M_A} = \vec{M_B} + \vec{AB} \wedge \vec{Q}$

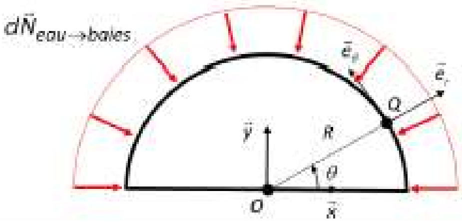
D'où $\vec{M_A} = -M_Q.\vec{y} + (-4,2).\vec{x} \wedge Q.\vec{y}$

$$\{T_{air\to rotAC}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4,2Q \end{Bmatrix}_A$$



EXERCICE 2

1. Représenter sur le schéma plan ci-dessus, le champ des forces élémentaires de pression $d\vec{N}_{eau\to baies}$.



2. Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{eau\to baies}(Q)$ de l'eau sur les baies en un point Q, en fonction de p et ds.

$$d\vec{F}_{eau\to baies}(Q) = d\vec{N}_{eau\to baies}(Q) + \cancel{d\vec{T}_{eau\to baies}(Q)} \Rightarrow \boxed{d\vec{F}_{eau\to baies}(Q) = -p\,ds\,\vec{e}_r}$$

3. Déterminer la résultante d'action globale de l'eau sur les baies $\vec{R}_{eau\to baies}$.

$$\vec{R}_{eau\to baies} = \int_{S_{contact}} d\vec{F}_{eau\to baies}(Q)$$

$$\vec{R}_{eau\to baies} = \int_{S_{contact}} -p\,ds\,\vec{e}_r$$

$$\vec{R}_{eau\to baies} = -p\int_{S_{contact}} \vec{e}_r\,ds$$

$$\vec{R}_{eau\to baies} = -p\iint_{z,\theta}(\cos\theta\,\vec{x}+\sin\theta\,\vec{y})\,R\,d\theta\,dz \qquad car \quad ds = R\,d\theta\times dz$$

$$\vec{R}_{eau\to baies} = -pR\int_{-L/2}^{L/2}dz\times\int_0^{\pi}(\cos\theta\,\vec{x}+\sin\theta\,\vec{y})d\theta$$

$$\vec{R}_{eau\to baies} = -pRL\left\{\vec{x}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta+\vec{y}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right\}$$

$$\vec{R}_{eau\to baies} = -pRL\left\{\vec{x}[\sin\theta]_0^{\pi}+\vec{y}[-\cos\theta]_0^{\pi}\right\}$$

$$\boxed{\vec{R}_{eau\to baies} = -pRL2\,\vec{y}}$$

4. Exprimer $\|\vec{R}_{eau\to baies}\|$ en fonction de $S_{projetée}$.

D'où : $\vec{R}_{eau\to baies} = -pRL2\,\vec{y} = -pS_{projetée}\,\vec{y} \Rightarrow \boxed{\|\vec{R}_{eau\to baies}\| = pS_{projetée} = \text{pression x surface projetée}}$

5. Déterminer le moment de l'action globale de l'eau sur les baies en O, $\vec{M}_{O,eau\to baies}$.

$$\vec{M}_{O,eau\to baies} = \int_{S_{contact}} \vec{OQ}\wedge d\vec{F}_{eau\to baies}(Q)$$

$$\vec{M}_{O,eau\to baies} = \int_{S_{contact}} (z\,\vec{z}+R\,\vec{e}_r)\wedge(-p\,ds\,\vec{e}_r)$$

$$\vec{M}_{O,eau\to baies} = \int_{S_{contact}} -zp\,ds\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{M}_{O,eau\to baies} = -p\iint_{z,\theta} z\,R\,d\theta\,dz\,(\cos\theta\,\vec{y}-\sin\theta\,\vec{x})$$

$$\vec{M}_{O,eau\to baies} = -pR\int_{-L/2}^{L/2}z\,dz\times\int_0^{\pi}(\cos\theta\,\vec{y}-\sin\theta\,\vec{x})\,d\theta$$

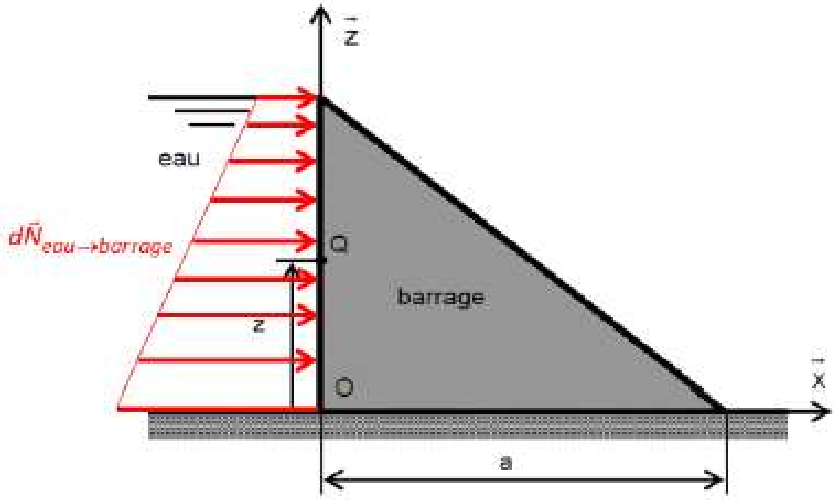
$$\vec{M}_{O,eau\to baies} = -pR\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-L/2}^{L/2}\times\left\{\vec{y}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta-\vec{x}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right\}$$

$$\boxed{\vec{M}_{O,eau\to baies} = \vec{0}}$$

L'action de pression est une force passant par le centre de la surface projetée.

EXERCICE 3

1. Représenter sur le schéma ci-dessus, le champ des forces élémentaires de pression $d\vec{N}_{eau \to barrage}$.



2. Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{eau \to barrage}(Q)$ de l'eau sur le barrage en un point Q, en fonction de p et ds, puis en fonction de p_0, ρ_{eau}, g, h, z et ds.

Sur chaque élément de surface ds situé autour d'un point Q de la paroi s'exerce une force élémentaire de résultante :

$d\vec{F}_{eau \to barrage}(Q) = d\vec{N}_{eau \to barrage}(Q) + \cancel{d\vec{T}_{eau \to barrage}} \Rightarrow \boxed{d\vec{F}_{eau \to barrage}(Q) = p(Q)\, ds\, \vec{x}}$

Les lois de l'hydrostatique permettent d'écrire : $p(Q) = p_0 + \rho_{eau}\, g\,(h - z)$

On a donc : $\boxed{d\vec{F}_{eau \to barrage}(Q) = \left[p_0 + \rho_{eau}\, g(h-z)\right] ds\, \vec{x}}$

3. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage.

$$\vec{R}_{eau \to barrage} = \int_{S_{contact}} d\vec{F}_{eau \to barrage}(Q)$$

$$\vec{R}_{eau \to barrage} = \int_{S_{contact}} \left[p_0 + \rho_{eau}\, g(h-z)\right] ds\, \vec{x}$$

$$\vec{R}_{eau \to barrage} = p_0 \int_{S_{contact}} ds\, \vec{x} + \rho_{eau}\, g \int_{S_{contact}} (h-z) ds\, \vec{x}$$

$$\vec{R}_{eau \to barrage} = p_0 S_{contact}\, \vec{x} + \rho_{eau}\, g \iint_{y,z} (h-z)\, dy\, dz\, \vec{x} \qquad car \quad ds = dy \times dz \quad \text{(surface rectangulaire)}$$

$$\vec{R}_{eau \to barrage} = p_0 h L\, \vec{x} + \rho_{eau}\, g \int_y dy \int_z (h-z)\, dz\, \vec{x}$$

$$\vec{R}_{eau \to barrage} = p_0 h L\, \vec{x} + \rho_{eau}\, g \left[y\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left[\frac{-(h-z)^2}{2}\right]_0^h \vec{x}$$

$$\vec{R}_{eau \to barrage} = p_0 h L\, \vec{x} + \rho_{eau}\, g\, L \frac{h^2}{2} \vec{x}$$

$$\vec{M}_{O,eau\to barrage} = \int_{S_{contact}} \vec{OQ}\wedge d\vec{F}_{eau\to barrage}(Q)$$

$$\vec{M}_{O,eau\to barrage} = \int_{S_{contact}} (y\,\vec{y}+z\,\vec{z})\wedge\left[p_0+\rho_{eau}\,g\,(h-z)\right]ds\,\vec{x}$$

$$\vec{M}_{O,eau\to barrage} = \int_{S_{contact}} (-y\,\vec{z}+z\,\vec{y})\left[p_0+\rho_{eau}\,g\,(h-z)\right]ds$$

$$\vec{M}_{O,eau\to barrage}\cdot\vec{y} = \iint_{y,z} z\left[p_0+\rho_{eau}\,g\,(h-z)\right]dy\,dz = \int_y dy\int_z z\left[p_0+\rho_{eau}\,g\,(h-z)\right]dz = L\left[\frac{p_0\,z^2}{2}+\rho_{eau}\,g\left(\frac{h\,z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\right]_0^h = L\left(\frac{p_0\,h^2}{2}+\rho_{eau}\,g\,\frac{h^3}{6}\right)$$

$$\vec{M}_{O,eau\to barrage}\cdot\vec{z} = \iint_{y,z} -y\left[p_0+\rho_{eau}\,g\,(h-z)\right]dy\,dz = \int_y -y\,dy\int_z\left[p_0+\rho_{eau}\,g\,(h-z)\right]dz = \left[-\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int_z\left[p_0+\rho_{eau}\,g\,(h-z)\right]dz = 0$$

$$\vec{M}_{O,eau\to barrage} = L\left(\frac{p_0\,h^2}{2}+\rho_{eau}\,g\,\frac{h^3}{6}\right)\vec{y}$$

O étant dans le plan médian du barrage, il est logique qu'il n'existe pas de composante de moment suivant $\vec{z}$. En effet, l'action de l'eau n'a pas la capacité de provoquer un mouvement de rotation du barrage autour de l'axe $(O,\vec{z})$

Donc $$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{eau\to barrage}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \left(p_0 hL+\rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^2}{2}\right)\vec{x} \\ L\left(\frac{p_0\,h^2}{2}+\rho_{eau}\,g\,\frac{h^3}{6}\right)\vec{y}\end{array}\right\}_O}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène
pour la 1ère expression à une résultante (N),
pour la 2ème expression à un moment (N.m).

4. En déduire les coordonnées y_A et z_A du centre de poussée A : point où ou le moment résultant de l'action mécanique de l'eau sur le barrage est nul.

On cherche un point A où le moment est nul, soit :

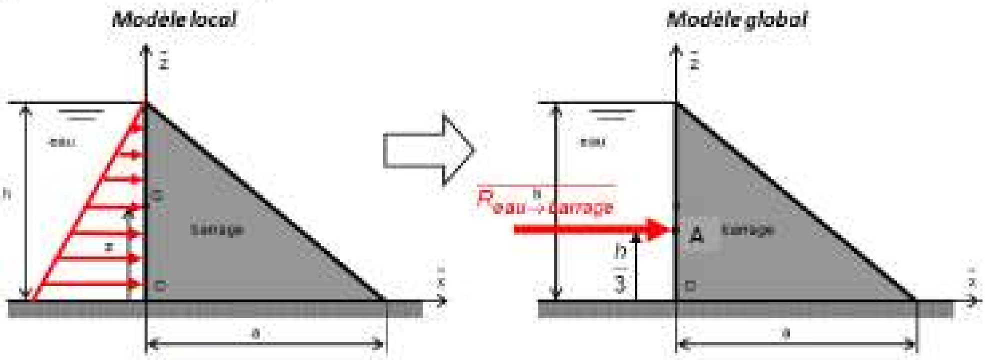
$$\vec{M}_{A,eau\to barrage} = \vec{0} = \vec{M}_{O,eau\to barrage} + \vec{AO}\wedge\vec{R}_{eau\to barrage}$$

A est appelé centre de poussée : point où l'action globale de l'eau sur le barrage ne crée pas de moment.

$$\vec{0} = L\left(\frac{p_0\,h^2}{2}+\rho_{eau}\,g\,\frac{h^3}{6}\right)\vec{y} + (-y_A\,\vec{y}-z_A\,\vec{z})\wedge\left(p_0 hL+\rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^2}{2}\right)\vec{x}$$

$$\vec{0} = \left[L\left(\frac{p_0\,h^2}{2}+\rho_{eau}\,g\,\frac{h^3}{6}\right) - z_A\left(p_0 hL+\rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^2}{2}\right)\right]\vec{y} + y_A\left(p_0 hL+\rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^2}{2}\right)\vec{z}$$

$$\boxed{\Rightarrow y_A = 0 \quad et \quad z_A = \frac{h}{3}}$$



Donc : $$\left\{\mathcal{T}_{eau\to barrage}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^2}{2}\,\vec{x} \\ \rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^3}{6}\,\vec{y}\end{array}\right\}_O = \left\{\begin{array}{l} \rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^2}{2}\,\vec{x} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_A$$

5. Vérifier le critère de l'exigence « poussée maxi de l'eau 300 10^6 N ».

$$\left\|\vec{R}_{eau\to barrage}\right\| = \rho_{eau}\,g\,L\,\frac{h^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\left\|\vec{R}_{eau\to barrage}\right\| = 245\cdot 10^6\,N < 300\cdot 10^6\,N}$$ Le critère de la fonction 1.2 est respecté.