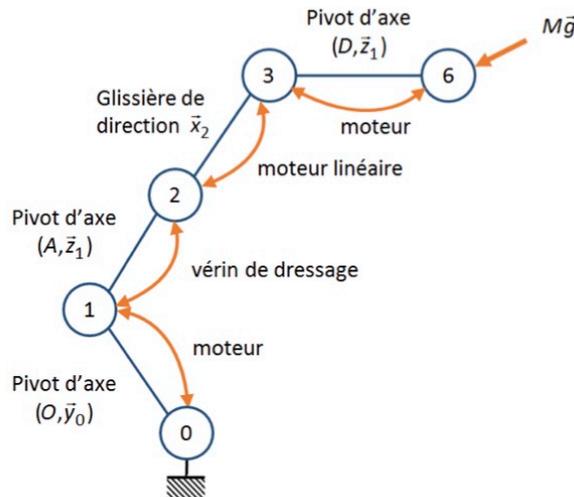
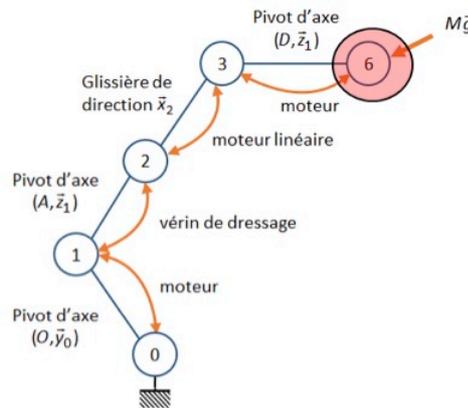


EXERCICE 6 : Echelle EPAS



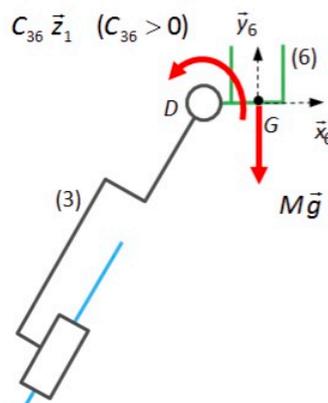
Détermination de C_{36} :

On isole (6).



Les AM extérieures au système isolé sont :

- le poids $\{T_{pes \rightarrow 6}\} = \begin{cases} -Mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \forall P \in (G, \vec{y}_1)$
- le couple moteur $\{T_{3 \xrightarrow{\text{moteur}} 6}\} = \begin{cases} \vec{0} \\ C_{36} \vec{z}_1 \end{cases}$
- la liaison L_{3-6} , pivot parfaite, $\{T_{3 \rightarrow 6}\} = \begin{cases} \vec{R}_{3 \rightarrow 6} \\ \vec{M}_{P,3 \rightarrow 6} \end{cases} \forall P \in (D, \vec{z}_1)$ avec $\vec{M}_{P,3 \rightarrow 6} \cdot \vec{z}_1 = 0$



Le théorème du moment statique, en D , en projection sur \vec{z}_1 s'écrit : $\vec{M}_{D,6 \rightarrow 6} \cdot \vec{z}_1 = 0$

Soit : $\vec{M}_{D,pes \rightarrow 6} \cdot \vec{z}_1 + \vec{M}_{D,3 \xrightarrow{\text{moteur}} 6} \cdot \vec{z}_1 + \underbrace{\vec{M}_{D,3 \rightarrow 6}}_0 \cdot \vec{z}_1 = 0$

avec :

- pour l'action de la pesanteur, on remarque que la direction de la force résultante est perpendiculaire à la droite qui passe par le point d'application de la force (G) et le point où l'on cherche à déterminer le moment (D). On peut donc simplement utiliser la méthode du « bras de levier » : $\vec{M}_{D,pes \rightarrow 6} \cdot \vec{z}_1 = -e Mg$

Cela dit, on peut bien entendu retrouver ce résultat avec : $\vec{M}_{D,pes \rightarrow 6} \cdot \vec{z}_1 = \vec{M}_{G,pes \rightarrow 6} \cdot \vec{z}_1 + (\vec{DG} \wedge \vec{R}_{pes \rightarrow 6}) \cdot \vec{z}_1$

- pour le couple moteur : $\vec{M}_{D,3 \xrightarrow{\text{moteur}} 6} \cdot \vec{z}_1 = C_{36}$

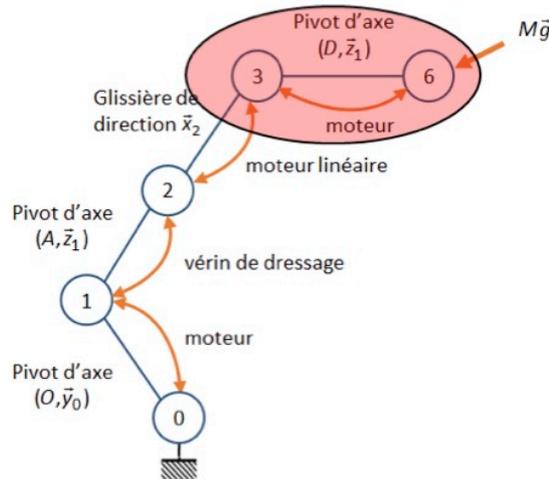
D'où, $C_{36} = eMg$

Le couple C_{36} est positif, correspondant à un couple dans le sens direct (+ \vec{z}_1).

AN : $C_{36} = 2650 \text{ N.m}$

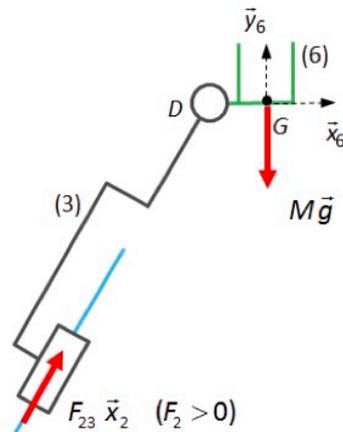
Détermination de F_{23} :

On isole (3+6).



Les AM extérieures au système isolé sont :

- le poids $\{T_{pes \rightarrow 6}\} = \underset{\forall P \in (G, \vec{y}_1)}{\begin{Bmatrix} -Mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$
- la force du moteur linéaire $\{T_{2 \xrightarrow{\text{moteur linéaire}} 3}\} = \underset{\forall P \in (D, \vec{x}_2)}{\begin{Bmatrix} F_{23} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$
- la liaison L2-3, glissière parfaite, $\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P,2 \rightarrow 3} \end{Bmatrix}}$ telle que $\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_2 = 0$

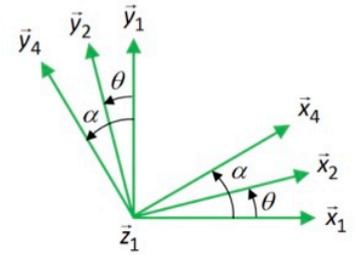


Le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{x}_2 s'écrit : $\vec{R}_{2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \vec{x}_2 = 0$

Soit : $\vec{R}_{pes \rightarrow 6} \cdot \vec{x}_2 + \vec{R}_{2 \xrightarrow{\text{moteur linéaire}} 3} \cdot \vec{x}_2 + \underbrace{\vec{R}_{2 \rightarrow 3}}_0 \cdot \vec{x}_2 = 0$

Avec :

- pour le poids : $\vec{R}_{pes \rightarrow 6} \cdot \vec{x}_2 = -Mg \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = -Mg \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = -Mg \sin \theta$
- pour la force du moteur linéaire : $\vec{R}_{2 \xrightarrow{\text{moteur linéaire}} 3} \cdot \vec{x}_2 = F_{23}$

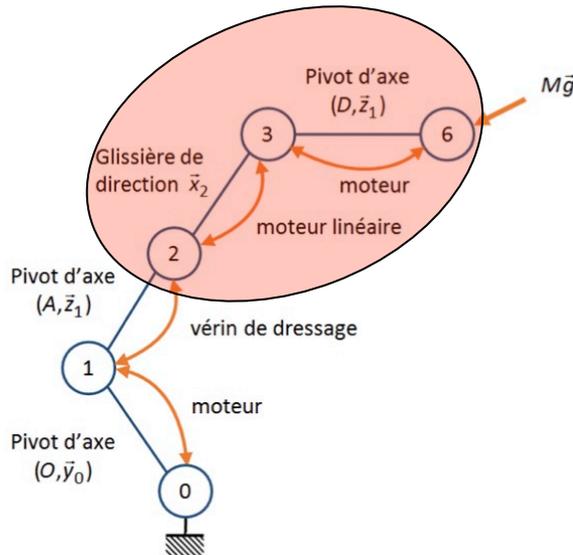


D'où, $F_{23} = Mg \sin \theta$

AN : $F_{23} = 1870 \text{ N}$

Détermination de F_{12} :

On isole (2+3+6)



BAME à l'ensemble isolé :

- le poids : $\{T_{pes \rightarrow 6}\} = \underset{\forall P \in (G, \vec{y}_1)}{\begin{cases} -Mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}}$
- la force du vérin de dressage V : $\{T_{1 \xrightarrow{\text{vérin}} 2}\} = \underset{\forall P \in (C, \vec{y}_4)}{\begin{cases} F_{12} \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{cases}}$
- la liaison L_{1-2} , pivot parfaite : $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{\forall P \in (A, \vec{z}_1)}{\begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{P,1 \rightarrow 2} \end{cases}}$ telle que $\vec{M}_{P,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_1 = 0$

Le théorème du moment statique, au point A en projection sur \vec{z}_1 s'écrit $\vec{M}_{A,2+3+6 \rightarrow 2+3+6} \cdot \vec{z}_1 = 0$

Soit :

$[\vec{AG} \wedge (-Mg \vec{y}_1) + \vec{AC} \wedge F_{12} \vec{y}_4] \cdot \vec{z}_1 = 0$
 $[((c+d)\vec{x}_2 + e\vec{x}_1) \wedge (-Mg \vec{y}_1) + c\vec{x}_2 \wedge F_{12} \vec{y}_4] \cdot \vec{z}_1 = 0$
 $-Mg((c+d)\cos\theta + e) + c \cdot F_{12} \cos(\alpha - \theta) = 0$

Finalement :

$$F_{12} = \frac{Mg((c+d)\cos\theta + e)}{c \cdot \cos(\alpha - \theta)}$$

AN : Rappel : $\theta = \alpha = 45^\circ$

$F_{12} = 17\,240 \text{ N}$

EXERCICE 7 : Coinceur

Q1)

a) Commençons par faire l'équilibre de la came **3** car elle n'est soumise qu'à deux glisseurs : celui du contact en **A** (liaison sphère-plan avec frottement et celui en **O** (liaison pivot parfaite).

Nota : la liaison pivot en **O** étant parfaite alors le glisseur d'action mécanique passe par le centre de cette liaison, soit le point **O**.

- **Isoler :** la came **3**.
- **BAME :** poids négligé, action de l'axe **2** (pivot en **O**), action de la paroi **1** (sphère-plan en **A**).
- **PFS :** on a un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs (un appliqué en **O** et l'autre en **A**), ces deux glisseurs sont donc égaux en norme et directement opposés.

⇒ La ligne d'action du glisseur de **1** sur **3** est la droite (**OA**).

b) Faisons maintenant l'équilibre de la came **4** : étude et conclusion identiques (solide soumis à l'action de deux glisseurs).

⇒ La ligne d'action du glisseur de **1** sur **4** est la droite (**OB**).

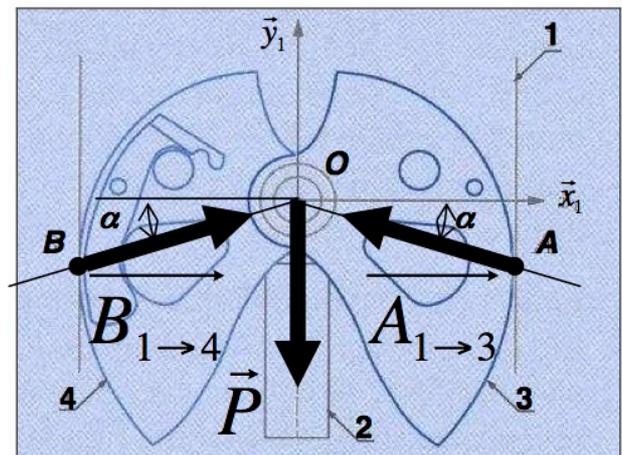
c) Faisons pour finir l'équilibre de l'ensemble [**2+3+4**] en utilisant les deux résultats précédents :

- **Isoler :** l'ensemble [**2+3+4**].
- **BAME :** poids négligé, action de la charge **P**, action de la paroi aux points **A** et **B** (liaisons sphère-plan avec frottement).
- **PFS :** par symétrie des actions mécaniques on a obligatoirement : $\|\vec{A}_{1 \rightarrow 3}\| = \|\vec{B}_{1 \rightarrow 4}\|$. Pour le démontrer il suffit d'écrire l'équation de la résultante statique (**TRS**) en projection sur \vec{x}_1 .

Utilisons le théorème de la résultante statique (**TRS**) en projection sur \vec{y}_1 :

$$-P + 2 \times \|\vec{A}_{1 \rightarrow 3}\| \times \sin \alpha = 0$$

⇒ $\|\vec{A}_{1 \rightarrow 3}\| = \frac{P}{2 \sin \alpha}$



Q2) Pour qu'il n'y ait pas de glissement en **A** (et en **B**) il faut que l'angle α soit inférieur à l'angle de frottement φ . Sinon il faudrait que l'action de contact en **A** sorte du cône de frottement, ce qui n'est pas possible, donc il ne pourrait plus y avoir d'équilibre et il y aurait glissement.

⇒ $f > \tan \alpha$

EXERCICE 8 : Pèse lettre

PREMIERE PARTIE

$$\theta = 0$$

Q1) Pour les deux liaisons pivot (en A et D) il ne peut pas y avoir de moment puisque :

- le problème est supposé plan donc pas de composante L_{ij} sur \vec{x}_1 , ni M_{ij} sur \vec{y}_1 .
- ces deux pivots étant parfaites (donc sans frottement) il n'y a pas non plus de composante du moment N_{ij} sur \vec{z}_1 .

Pour les deux liaisons sphérique (en B et C) il ne peut pas y avoir de composante statique pour le moment puisque les trois rotations sont possibles. Ces deux liaisons ne peuvent donc pas transmettre de moment (liaisons parfaites c'est-à-dire sans frottement).

Conclusion : les actions mécaniques au niveau de ces quatre liaisons sont donc de simples glisseurs.

Q2) Les glisseurs de chacune des quatre liaisons passent par le centre de la liaison concernée parce que ces liaisons sont parfaites (plus précisément : sans frottement).

Si ces liaisons n'avaient pas été supposées parfaites on aurait toujours eu des glisseurs mais leur ligne d'action ne serait plus passée par le centre de la liaison concernée.

Q3) L'une des pièces du mécanisme n'est soumise qu'à deux glisseurs (son poids étant négligé) : il s'agit de la bielle 4 avec deux liaisons sphériques aux extrémités (une en B et l'autre en C).

Le fait que cette pièce est en équilibre entraîne alors que ces deux glisseurs doivent être égaux en norme et directement opposés, c'est-à-dire portés par la droite (BC) .

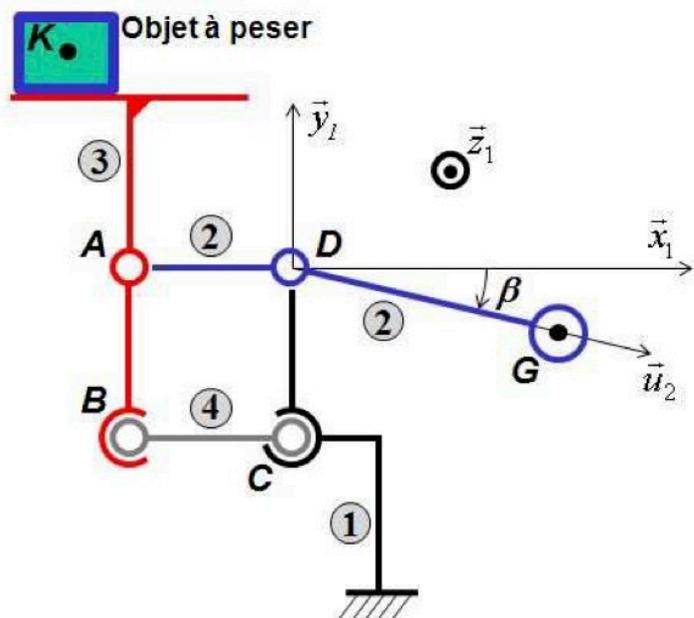
Cela permettra ainsi de connaître, lors de l'isolement du plateau 3 , la direction du glisseur appliqué en B de 4 sur 3 .

Q4) Si $\theta = 0$ alors le système est dans la configuration ci-contre :

On a : $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et les segments $[AD]$ et $[BC]$ sont horizontaux.

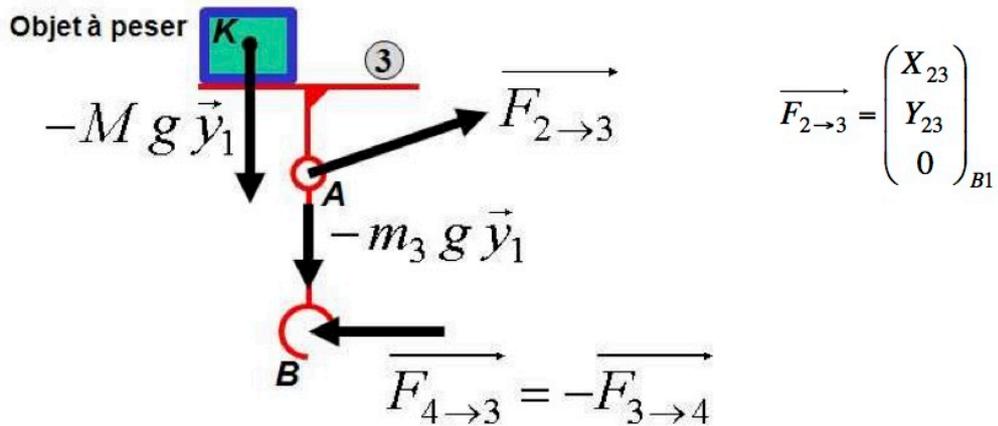
Isolons d'abord la bielle 4 :

- Isoler : la bielle 4 .
- BAME : poids négligé, action du châssis 1 (sphérique en C), action du plateau 3 (sphérique en B).
- PFS : on a un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs (un appliqué en C et l'autre appliqué en B), ces deux glisseurs sont donc égaux en norme et directement opposés.



La ligne d'action du glisseur de 3 sur 4 (et du glisseur de 1 sur 4) est la droite (BC) , c'est-à-dire que ces deux efforts sont horizontaux et n'ont donc pas de composante sur la verticale \vec{y}_1 .

Q5) Equilibre du plateau 3 et de l'objet posé :



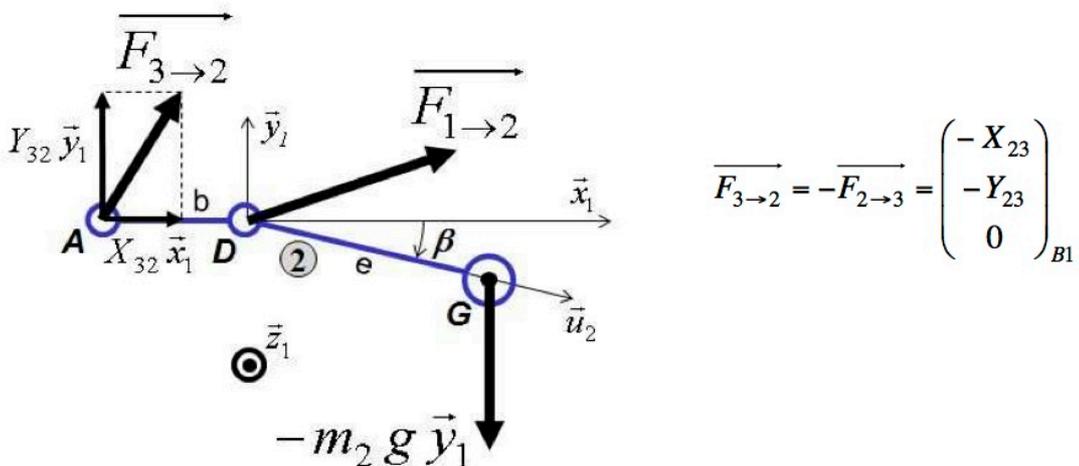
- **Isoler** : le plateau 3 associé à l'objet posé dessus.
- **BAME** :
 - poids du plateau 3 : glisseur $-m_3 g \vec{y}_1$ porté par la droite (AB) .
 - poids de l'objet posé : $-M g \vec{y}_1$ appliqué au point K avec $\vec{AK} = -c \vec{x}_1 + d \vec{y}_1$.
 - action du balancier 2 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application A (car liaison pivot parfaite).
 - action de la biellette 4 (sphérique centrée en B) : glisseur appliqué en B de support la droite (BC) d'après la question précédente.
- **PFS** : résultantes (TRS) en projection sur la verticale \vec{y}_1 .

$$-M g - m_3 g + Y_{23} + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{23} = (M + m_3) g$$

Pas de composante verticale de l'action de 4 sur 3 d'après la question précédente

Nota : la composante horizontale X_{23} compense l'action en B de 4 sur 3 qui est horizontale d'après la question précédente (TRS en projection sur \vec{x}_1).

Q6) Equilibre du balancier 2 :



- **Isoler** : le balancier 2.
- **BAME** :
 - poids du balancier 2 : $-m_2 g \vec{y}_1$ appliqué au point **G**.
 - action du châssis 1 (pivot en D) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application **D** (car liaison pivot parfaite).
 - action du plateau 3 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application **A** (car liaison pivot parfaite).
- **PFS** : moments (**TMS**) au point **D** en projection sur \vec{z}_1 .

$$-b \times Y_{32} - (e \cos \beta) \times m_2 g = 0 \implies -b \times (-Y_{23}) - e \cos \beta \times m_2 g = 0$$

$$\implies \boxed{b \times Y_{23} - e \cos \beta \times m_2 g = 0}$$

Nota : le moment en **D** de la composante X_{32} de l'action de 3 sur 2 est nul car elle passe par le point **D**.

Q7) On obtient finalement les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} Y_{23} = (M + m_3)g \\ b \times Y_{23} - e \cos \beta \times m_2 g = 0 \end{cases}$$

On en déduit la relation suivante : $b \times (M + m_3)g - e \cos \beta \times m_2 g = 0$

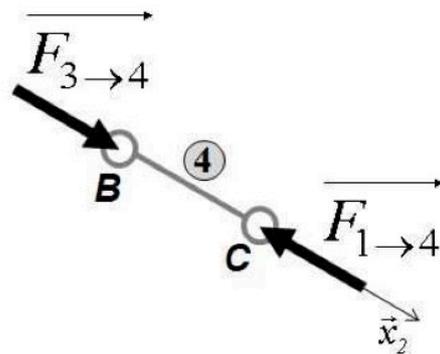
$$\implies \boxed{M = \frac{e}{b} \times \cos \beta \times m_2 - m_3}$$

A.N. : $M = \frac{7}{4,5} \times \cos 15^\circ \times 50 - 20 \implies \boxed{M = 55 \text{ g}}$

DEUXIEME PARTIE $\implies \theta \neq 0$

Q8) Equilibre de la biellette 4 :

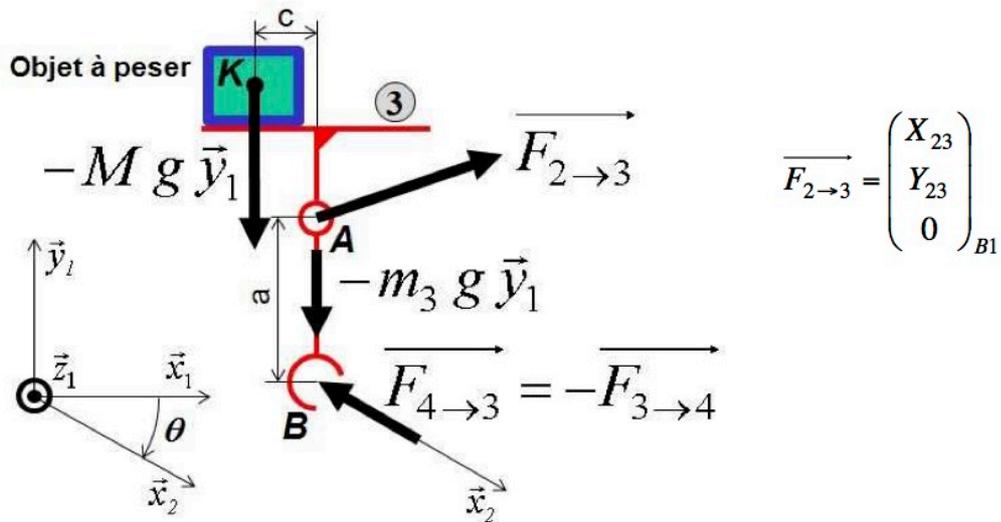
- **Isoler** : la biellette 4.
- **BAME** : poids négligé, action du châssis 1 (sphérique en **C**), action du plateau 3 (sphérique en **B**).
- **PFS** : on a un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs (un appliqué en **C** et l'autre appliqué en **B**), ces deux glisseurs sont donc égaux en norme et directement opposés.



\implies La ligne d'action du glisseur de 3 sur 4 et du glisseur de 1 sur 4 est la droite (**BC**).

Nota : les deux liaisons sphériques étant parfaites les actions mécaniques (glisseurs) passent par leur centre respectif.

Q9) Equilibre du plateau 3 et de l'objet posé :



- **Isoler** : le plateau 3 associé à l'objet posé dessus.
- **BAME** :
 - poids du plateau 3 : glisseur $-m_3 g \vec{y}_1$ porté par la droite (AB).
 - poids de l'objet posé : $-M g \vec{y}_1$ appliqué au point K avec $\vec{AK} = -c \vec{x}_1 + d \vec{y}_1$.
 - action du balancier 2 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application A (car liaison pivot parfaite).
 - action de la biellette 4 (sphérique centrée en B) : glisseur appliqué en B de support la droite (BC) d'après la question précédente.
- **PFS** : résultantes (TRS) en projection dans la base B_1 et équation des moments (TMS) au point A en projection sur \vec{z}_1 .

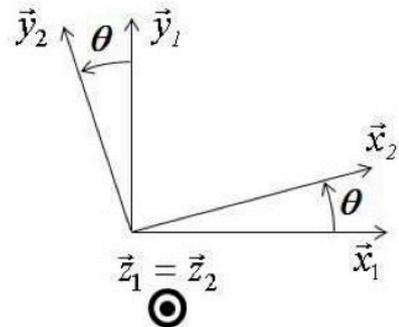
Bien noter que l'angle θ est négatif.

- TRS en projection sur \vec{x}_1 : $X_{23} - \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \cos(-\theta) = 0 \implies X_{23} = \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \cos \theta$

- TRS en projection sur \vec{y}_1 : $-M g - m_3 g + Y_{23} + \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \sin(-\theta) = 0$

$$\implies Y_{23} = \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \sin \theta + (M + m_3) g$$

- TMS en A sur \vec{z}_1 : l'angle θ est négatif, nous allons maintenant raisonner vectoriellement sur la figure ci-contre pour effectuer le calcul du moment de l'action en A de 4 sur 3 :

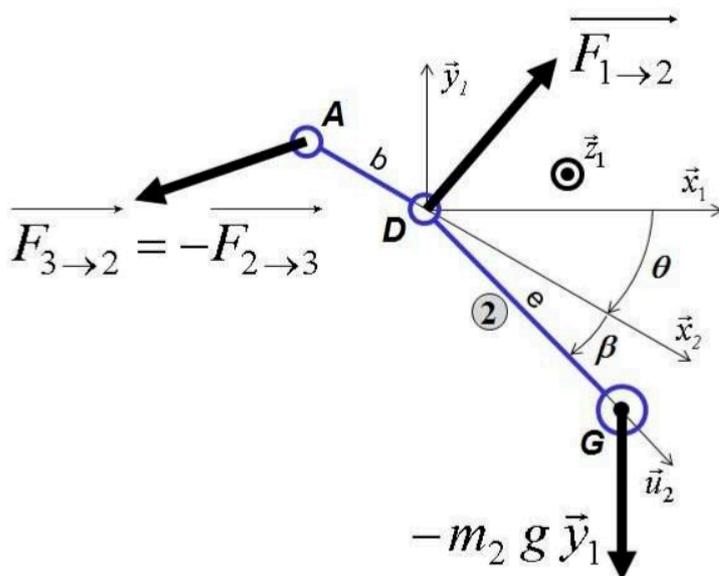


$$\begin{aligned} \vec{M}(A; \vec{F}_{4 \rightarrow 3}) &= \vec{M}(B; \vec{F}_{4 \rightarrow 3}) + \vec{AB} \wedge \vec{F}_{4 \rightarrow 3} \\ &= -a \vec{y}_1 \wedge \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| (-\vec{x}_2) = +a \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 \\ &= a \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) (-\vec{z}_1) \implies \vec{M}(A; \vec{F}_{4 \rightarrow 3}) = -a \|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| \cos \theta \vec{z}_1 \end{aligned}$$

D'où le TMS en A sur \vec{z}_1 : $+M g \times c - a \| \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} \| \cos \theta = 0$

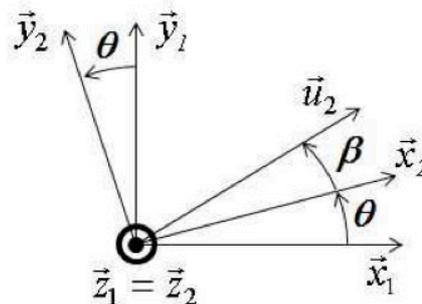
$$\Rightarrow \boxed{\| \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} \| = + \frac{M g \times c}{a \cos \theta}}$$

Q10) Equilibre du balancier 2 :



$$\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}} = -\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} = \begin{pmatrix} -X_{23} \\ -Y_{23} \\ 0 \end{pmatrix}_{B1}$$

- **Isoler** : le balancier 2.
- **BAME** :
 - poids du balancier 2 : $-m_2 g \vec{y}_1$ appliqué au point G .
 - action du châssis 1 (pivot en D) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application D (car liaison pivot parfaite).
 - action du plateau 3 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application A (car liaison pivot parfaite).
- **PFS** : moments (TMS) au point D en projection sur \vec{z}_1 . Les angles θ et β étant négatifs, nous allons raisonner vectériellement sur la figure ci-contre :



- Moment en D de l'action appliquée en A :

$$\overrightarrow{M(D; \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}})} = \overrightarrow{M(A; \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}})} + \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}}$$

$$= -b \vec{x}_2 \wedge \begin{pmatrix} +X_{32} \\ +Y_{32} \\ 0 \end{pmatrix}_{B1} = -b \begin{pmatrix} +\cos \theta \\ +\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{B1} \wedge \begin{pmatrix} +X_{32} \\ +Y_{32} \\ 0 \end{pmatrix}_{B1}$$

$$= -b \times (+\cos \theta Y_{32} - \sin \theta X_{32}) \vec{z}_1 = b \times (-\cos \theta Y_{32} + \sin \theta X_{32}) \vec{z}_1$$

- Moment en D du poids appliqué en G :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{M(D; P_{pes \rightarrow 2})} &= \overrightarrow{M(G; P_{pes \rightarrow 2})} + \overrightarrow{DG} \wedge \overrightarrow{P_{pes \rightarrow 2}} \\
 &= +e \vec{u}_2 \wedge -m_2 g \vec{y}_1 = -e m_2 g (\vec{u}_2 \wedge \vec{y}_1) = -e m_2 g \left\{ + \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \beta)\right) \vec{z}_1 \right\} \\
 &= -e m_2 g \cos(\theta + \beta) \vec{z}_1
 \end{aligned}$$

D'où le TMS en D sur \vec{z}_1 : $b \times (-\cos\theta Y_{32} + \sin\theta X_{32}) - e m_2 g \cos(\theta + \beta) = 0$

$$\Rightarrow b \times (\sin\theta X_{32} - \cos\theta Y_{32}) = e m_2 g \cos(\theta + \beta)$$

Q11) On obtient finalement les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases}
 X_{23} = -X_{32} = \|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\| \times \cos\theta \\
 Y_{23} = -Y_{32} = \|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\| \times \sin\theta + (M + m_3)g \\
 \|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\| = + \frac{M g \times c}{a \cos\theta} \\
 b \times (\sin\theta X_{32} - \cos\theta Y_{32}) = e m_2 g \cos(\theta + \beta)
 \end{cases}$$

En reportant dans la dernière équation les résultats des deux premières on obtient :

$$b \times \left\{ \sin\theta \times \left(-\|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\| \times \cos\theta \right) - \cos\theta \times \left(-\|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\| \times \sin\theta - (M + m_3)g \right) \right\} = e m_2 g \cos(\theta + \beta)$$

$$\Rightarrow b \times \left\{ -\cancel{\sin\theta \times \cos\theta \times \|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\|} + \cancel{\cos\theta \times \sin\theta \times \|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\|} + \cos\theta \times (M + m_3)g \right\} = e m_2 g \cos(\theta + \beta)$$

$$\Rightarrow +b \cos\theta \times (M + m_3)g = +e m_2 g \cos(\theta + \beta)$$

$$\Rightarrow (M + m_3) = \frac{e m_2 \cos(\theta + \beta)}{b \cos\theta}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos\theta} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3$$

Nota : finalement le calcul de l'expression de $\|\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}}\|$ était inutile...

La position de l'objet sur le plateau 3 n'a aucune influence sur la valeur de l'angle θ puisque la distance c qui le positionne n'apparaît pas dans le résultat final.

Q12) Si $\theta = 0$ on obtient : $M = \frac{\cos(0 + \beta)}{\cos 0} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3 \Rightarrow M = \cos \beta \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3$

On retrouve bien le résultat mis en place dans la première partie.

Q13) $M = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos \theta} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3 \Rightarrow m_2 = (M + m_3) \times \frac{\cos \theta}{\cos(\theta + \beta)} \times \frac{b}{e}$

A.N.: $m_2 = (0 + 20) \times \frac{\cos(-70^\circ)}{\cos(-70^\circ - 15^\circ)} \times \frac{4,5}{7} \Rightarrow m_2 = 50 \text{ g}$

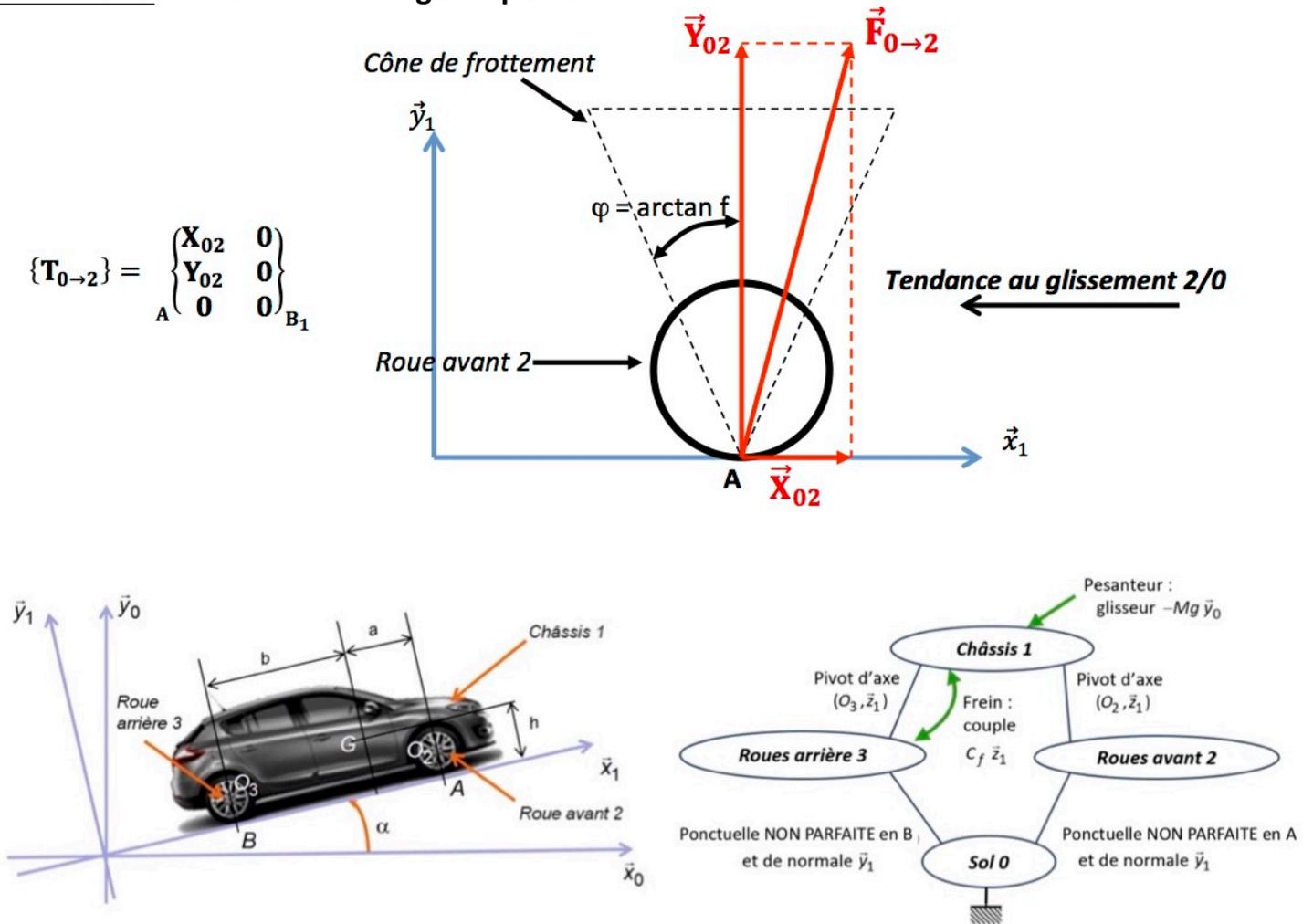
On retrouve la valeur donnée en première partie.

Q14) Le segment [DG] est horizontal lorsque $(\theta + \beta) = 0$ c'est-à-dire $\theta = +15^\circ$.

$M = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos \theta} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3 \Rightarrow M = \frac{\cos(+15^\circ - 15^\circ)}{\cos(+15^\circ)} \times \frac{7}{4,5} \times 50 - 20 \Rightarrow M = 60 \text{ g}$

Q15) Il suffit de pouvoir déplacer le contrepoids placé au point G ce qui modifie ainsi la distance e .

EXERCICE 9 : Aide au démarrage en pente



Dans tout ce qui suit, les torseurs d'actions mécaniques seront écrits en tenant compte de l'hypothèse de problème plan $(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

Isolons 2. L'inventaire des actions mécaniques extérieures est :

- o AM du sol 0 sur les roues avant 2 transmissibles dans la liaison sphère-plan NON PARFAITE au point A et de normale

$$\vec{y}_1 : \{T_{0 \rightarrow 2}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} X_{02} \vec{x}_1 + Y_{02} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Avec $|X_{02}| \leq f |Y_{02}|$ (loi de Coulomb), la tendance au glissement de 2/0 est suivant $-\vec{x}_1$ donc $X_{02} > 0$

- o AM du châssis 1 sur les roues avant 2 transmissibles dans la liaison pivot parfaite d'axe (O_2, \vec{z}_1) :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{O_2}{\left\{ \begin{array}{c} X_{12} \vec{x}_1 + Y_{12} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Ce solide est soumis à deux actions mécaniques extérieures modélisables par des glisseurs. Ce solide étant à l'équilibre, l'application du PFS permet d'écrire :

$$\{T_{0 \rightarrow 2}\} = -\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{\forall P \in (A, \vec{y}_1)}{\left\{ \begin{array}{c} Y_{02} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

On remarque qu'il n'y a pas de résistance au glissement (composante tangentielle nulle) au niveau du contact entre les roues avant 2 et le sol 0. Cela s'explique par le fait que ces roues 2 ne sont pas freinées (ou bloquées), il n'y a donc pas de tendance au glissement.

Isolons 1+2+3. L'inventaire des actions mécaniques extérieures est :

- AM du sol 0 sur les roues arrière 3 transmissibles dans la liaison **sphère-plan NON PARFAITE au point B** et de normale

$$\vec{y}_1 : \{T_{0 \rightarrow 3}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} X_{03} \vec{x}_1 + Y_{03} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Avec $|X_{03}| \leq f |Y_{03}|$ (loi de Coulomb), la tendance au glissement de 3/0 est suivant $-\vec{x}_1$ donc $X_{03} > 0$

- AM du sol 0 sur les roues avant 2 transmissibles dans la liaison **sphère-plan NON PARFAITE au point A** et de normale

$$\vec{y}_1 : \{T_{0 \rightarrow 2}\} = \underset{\forall P \in (A, \vec{y}_1)}{\left\{ \begin{array}{l} Y_{02} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad (\text{voir question précédente})$$

- AM de la pesanteur sur le châssis 1 : $\{T_{pes \rightarrow 1}\} = \underset{\forall P \in (G, \vec{y}_0)}{\left\{ \begin{array}{l} -Mg \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$

Cet ensemble 1+2+3 est à l'équilibre. Appliquons le théorème de la résultante statique : $\vec{R}_{1+2+3 \rightarrow 1+2+3} = \vec{0}$

Soit $X_{03} \vec{x}_1 + Y_{03} \vec{y}_1 + Y_{02} \vec{y}_1 - Mg \vec{y}_0 = \vec{0}$

En projetant dans $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} / \vec{x}_1 : X_{03} - Mg \sin \alpha = 0 \quad (1) \\ / \vec{y}_1 : Y_{03} + Y_{02} - Mg \cos \alpha = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

Cet ensemble 1+2+3 est à l'équilibre. Appliquons le théorème du moment statique au point A : $\vec{M}_{A, 1+2+3 \rightarrow 1+2+3} = \vec{0}$

Avec :

- $\vec{M}_{A, 0 \rightarrow 3} = -(Y_{03})(a+b) \vec{z}_1$
 - $\vec{M}_{A, 0 \rightarrow 2} = \vec{0}$
 - $\vec{M}_{A, pes \rightarrow 1} = [(Mg \cos \alpha)(a) + (Mg \sin \alpha)(h)] \vec{z}_1$
- en utilisant la méthode du bras de levier

En projetant sur \vec{z}_1 : $-(Y_{03})(a+b) + (Mg \cos \alpha)(a) + (Mg \sin \alpha)(h) = 0 \quad (3)$

Ainsi selon les équations 1, 2 et 3, on obtient :

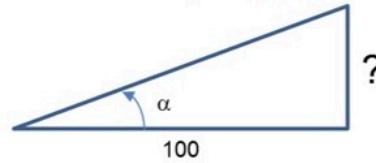
$$\left\{ \begin{array}{l} X_{03} = Mg \sin \alpha \\ Y_{03} = Mg \frac{(a \cos \alpha + h \sin \alpha)}{a+b} \\ Y_{02} = Mg \frac{(b \cos \alpha - h \sin \alpha)}{a+b} \end{array} \right.$$

Pour qu'il n'y ait pas de glissement entre les roues arrière 3 et le sol 0, il faut selon les lois de Coulomb : $|X_{03}| \leq f |Y_{03}|$

On cherche donc α tel que :

$$Mg \sin \alpha \leq f Mg \frac{(a \cos \alpha + h \sin \alpha)}{(a+b)} \Rightarrow \sin \alpha \leq f \frac{(a \cos \alpha + h \sin \alpha)}{(a+b)} \Rightarrow \sin \alpha [(a+b) - fh] \leq f a \cos \alpha$$

Soit : $\alpha \leq \arctan \left[\frac{fa}{(a+b) - fh} \right] = 17^\circ = 30\%$



Pour qu'il n'y ait pas de basculement, il faut que la composante normale de l'action du sol 0 sur les roues avant 2 soit orientée du sol 0 vers la roue 2, soit : $Y_{02} \geq 0$

En effet, pour maintenir le véhicule en équilibre en cas de basculement, il faudrait que le sol 0 « retienne » le véhicule, ce qui correspond à une composante normale suivant $-\vec{y}_1$, soit $Y_{02} < 0$. La limite du basculement correspond à la situation où $Y_{02} = 0$.

On cherche donc α tel que : $b \cos \alpha - h \sin \alpha \geq 0$

Soit : $\alpha \leq \arctan \left(\frac{b}{h} \right) = 57^\circ = 155\%$

Isolons 3. L'inventaire des actions mécaniques extérieures est :

- o AM du sol 0 sur les roues arrière 3 transmissibles dans la liaison : sphère-plan NON PARFAITE au point B et de normale

$$\vec{y}_1 : \{T_{0 \rightarrow 3}\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{03} \vec{x}_1 + Y_{03} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{matrix} \quad (\text{connue parfaitement, voir question 3})$$

- o AM du châssis 1 sur les roues arrière 3 transmissibles dans la liaison pivot parfaite d'axe (O_3, \vec{z}_1) :

$$\{T_{1 \rightarrow 3}\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{13} \vec{x}_1 + Y_{13} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{matrix}$$

- o AM du frein sur les roues arrière 3 : $\{T_{1 \xrightarrow{\text{freinage}} 3}\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_f \vec{z}_1 \end{array} \right\} \end{matrix}$

Ce solide 3 est à l'équilibre. Appliquons le théorème du moment statique au point O_3 en projection sur \vec{z}_1 : $\vec{M}_{O_3, \vec{z}_1} = 0$

Avec :

- o $\vec{M}_{O_3, 0 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = X_{03} \frac{D}{2}$



en utilisant la méthode du bras de levier

- o $\vec{M}_{O_3, 1 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = 0$

- o $\vec{M}_{O_3, 1 \xrightarrow{\text{freinage}} 3} \cdot \vec{z}_1 = C_f$

Donc : $X_{03} \frac{D}{2} + C_f = 0 \Rightarrow C_f = -Mg \frac{D}{2} \sin \alpha$

AN pour une pente de 30% : $C_{f \text{ roues arrière}} = -1230 \text{ Nm}$ soit $C_{f \text{ 1 roue arrière}} = -615 \text{ Nm}$

On trouve un couple de freinage < 0 , ce qui correspond bien au freinage de la voiture.