Déterminer les Caractéristiques du Mouvement

Travaux Dirigés n°5 : Vecteurs Vitesse et Accélération par calcul direct

MP2I/PCSI

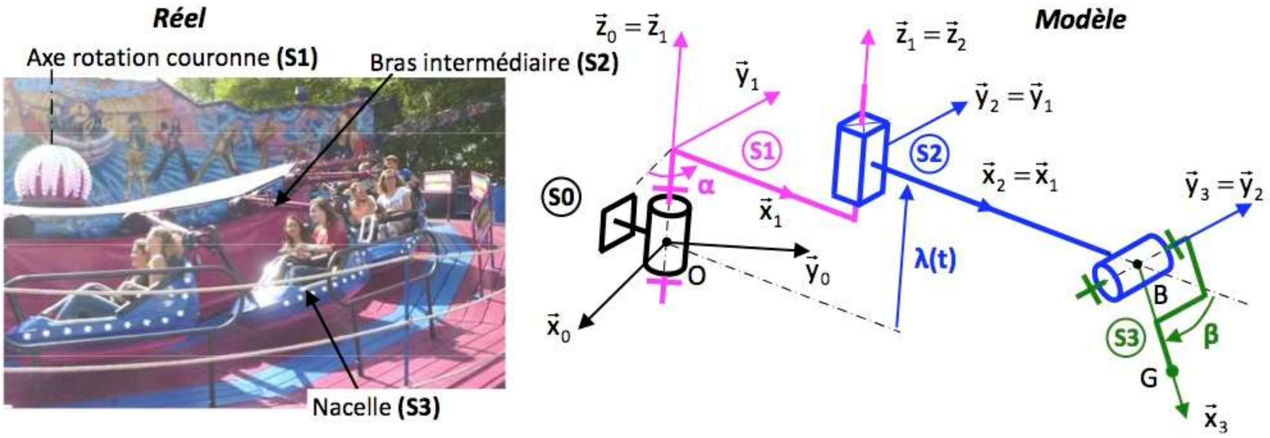
Exercice 1 : ***Manège de fête foraine : « La chenille »***

On s'intéresse dans ce problème à un manège rencontré dans les fêtes foraines, inspiré du manège communément appelé « la chenille » et qui est une version améliorée pour plus de sensations fortes.

Ce type d'attraction permet de procurer des sensations importantes aux passagers, à la fois en marche avant et en arrière par un mouvement de « brassage ». L'ensemble tourne à une vitesse maximale de 14 tours/min. Les voitures sont suspendues par le haut et peuvent basculer de gauche à droite à chaque dos d'âne. Au plus haut de ces bosses, les nacelles se retournent quasiment « à l'envers ».

Exigences	Critères	Niveaux
Le système doit respecter les exigences techniques suivantes	… Valeur maximale l'accélération reçue par un passager d'une masse de 70 kg pour un angle $\beta = cte = \pi/2$ et une accélération radiale $\ddot{\lambda} = 1{,}6 m/s^2$. …	… 2g maximum

On s'intéresse au mouvement de la nacelle (S3) du manège dont on donne une description structurelle ainsi qu'une modélisation cinématique.



On considère que le système est constitué de quatre sous ensembles nommés (S0), (S1), (S2) et (S3) pour lesquels on associe un repère Ri. Chaque repère Ri possède la base notée $b_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

Le solide (S1) qui correspond à la couronne centrale du manège est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti (S0). On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Le bras intermédiaire (S2) est en liaison glissière de direction $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$ avec la couronne centrale (S1).

Enfin la nacelle (S3) est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{y}_2)$ avec le bras (S2). On pose $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$; $\overrightarrow{OB} = \lambda(t).\vec{z}_0 + a.\vec{x}_1 + b.\vec{x}_2$ et $\overrightarrow{BG} = l.\vec{x}_3$. G correspond au centre de gravité de la nacelle (S3).

Q.1. Que peut-on dire de la base b_1 par rapport à la base b_2 compte tenu de la liaison entre (S2) et (S1).

Q.2. Tracer les figures géométrales (ou figures de calcul planes) représentant les angles α et β.

Q.3. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{G,S3/S0}}$.

On s'intéresse désormais à un passager P installé dans une nacelle (S3). Le théorème de la résultante dynamique (issu de l'écriture du principe fondamental de la dynamique pour les solides) appliqué au passager seul conduit à écrire dans le référentiel galiléen lié au solide (S0) l'équation suivante :

$$m.\overrightarrow{\Gamma_{G,passager/S0}} = -m.g.\vec{z}_0 + \overrightarrow{F_{S3 \rightarrow passager}}$$

Où :

- $\overrightarrow{\Gamma_{G,passager/S0}}$ est l'accélération du centre d'inertie G du passager dans son mouvement par rapport à S0. On considèrera ici pour simplifier que le centre d'inertie du passager est confondu avec le centre de gravité de la nacelle S3 par conséquent $\overrightarrow{\Gamma_{G,passager/S0}} = \overrightarrow{\Gamma_{G,S3/S0}}$.
- $\overrightarrow{F_{S3 \rightarrow passager}}$ est l'action mécanique correspondant à la force de réaction exercée par la nacelle sur le passager.
- m est la masse du passager en kg.
- g l'accélération de la pesanteur (en m/s²).

Par conséquent la « force ressentie » par le passager sur son siège s'écrit : $\overrightarrow{F_{passager \rightarrow S3}} = -m.(\overrightarrow{\Gamma_{G,S3/S0}} + g.\vec{z}_0)$

La composante de cette « force ressentie » selon l'axe de la colonne vertébrale du passager permet de caractériser l'accélération équivalente ressenti par celui-ci.

Q.4. Calculer la projection de cette force selon l'axe $\vec{x}_3$, soit $\overrightarrow{F_{passager \rightarrow nacelle}}.\vec{x}_3$.

Pour faire l'application numérique de la projection $\overrightarrow{F_{passager \rightarrow nacelle}}.\vec{x}_3$ et connaître le nombre de « g » ressenti par le passager à tout instant, il est normalement nécessaire de connaître l'évolution des paramètres α, β et λ en fonction du temps.

Q.5. Pour la configuration correspondant à celle définie dans l'exigence du cahier des charges, déterminer l'accélération équivalente « ressentie » par le passager et commenter la valeur obtenue.

Exercice 2 : ***Robot cueilleur de fruits***

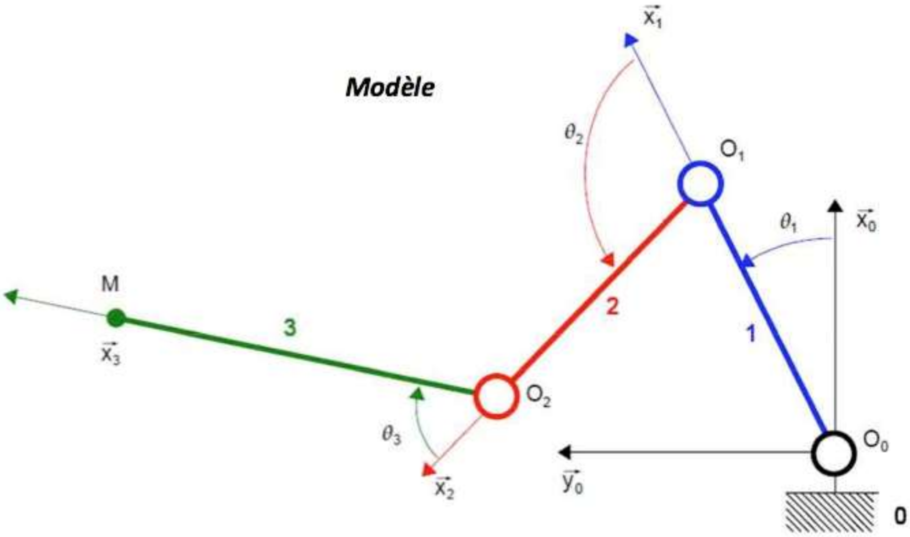
On étudie un robot ramasseur de fruits. Il permet à un agriculteur de cueillir, de manière automatique, les fruits mûrs dans les arbres, et de les mettre dans un conteneur spécifique.

Exigences techniques	Critère	Niveau
Exigence 1.4	Vitesse d'approche du fruit	< 3 cm/s

Le bras 1 tourne autour de l'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ par rapport au bâti 0. Le bras 2 tourne autour de l'axe $(O_1, \vec{z}_0)$ par rapport à 1. Le bras 3 tourner autour de l'axe $(O_2, \vec{z}_0)$ par rapport à 2.

On donne :

$$\overrightarrow{O_0O_1} = R.\vec{x}_1$$
$$\overrightarrow{O_1O_2} = R.\vec{x}_2$$
$$\overrightarrow{O_2M} = L.\vec{x}_3$$



Q.1. Construire les figures planes de repérage/paramétrage puis exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.

Q.2. Déterminer $\overrightarrow{V_{O_1,1/0}}$.

Q.3. Déterminer $\overrightarrow{V_{O_2,2/0}}$.

Q.4. Déterminer $\overrightarrow{V_{M,3/0}}$.

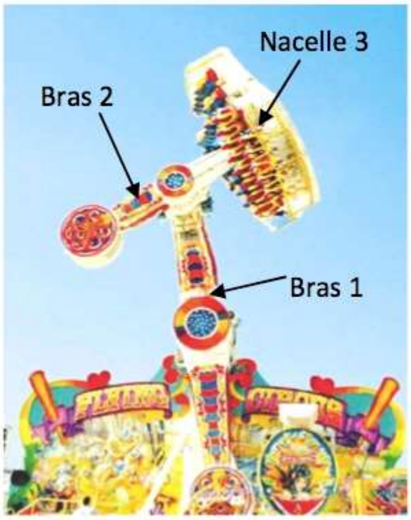
Q.5. Dans la configuration de rapprochement horizontal, ($\theta_2 = \pi - 2.\theta_1$ et $\theta_3 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$) montrer que $\overrightarrow{V_{M,3/0}}.\vec{x}_0 = 0$ et déterminer $\left\|\overrightarrow{V_{M,3/0}}\right\|$.

Q.6. Déterminer la valeur numérique de la vitesse maximale (R = 48 cm, L = 72 cm et $\dot{\theta}_1$ = 0,08 tr/min) et conclure quant à la capacité du robot à satisfaire le critère de vitesse d'approche du fruit du cahier des charges.

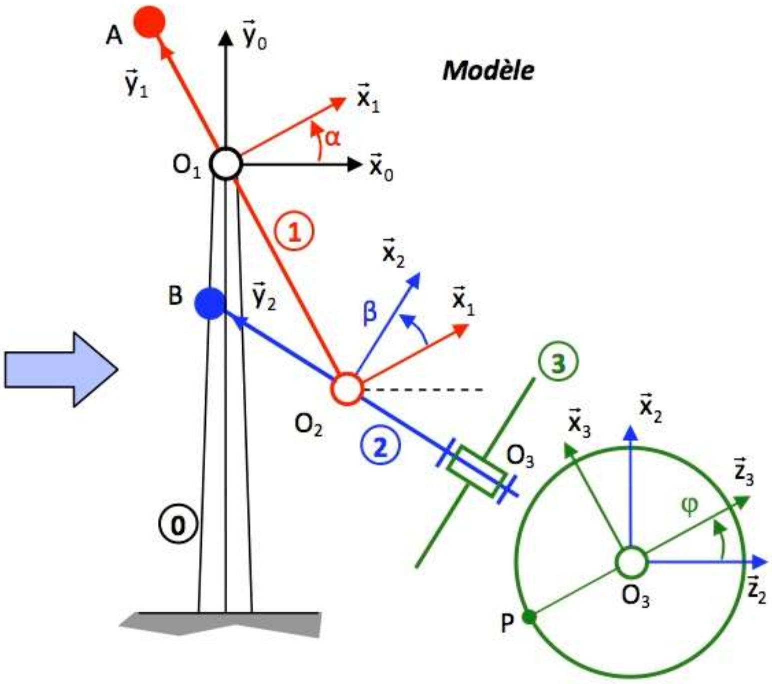
Exercice 3 : ***Manège Magic Arms***

Le manège Magic-Arms dont on la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel, est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 sièges disposés sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaire (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par un ordinateur.

Système réel



Modèle



Exigences techniques	Critère	Niveau
Exigence 1.2	Accélération subie par le passager	2,5g maxi

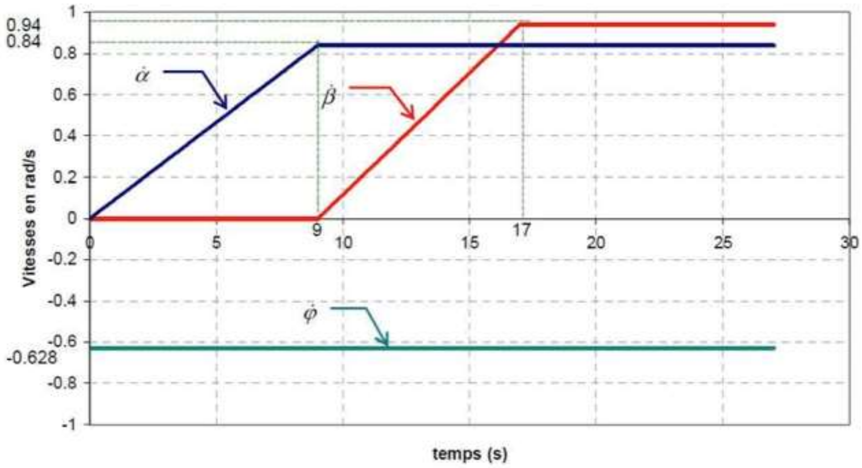
Le manège dont on donne la modélisation ci dessus comporte :

- un bras principal 1 assimilé à une barre AO_1O_2. Il est en liaison pivot parfaite d'axe $(O_1, \vec{z}_1)$ caractérisé par le paramètre α avec le bâti 0. On pose $\overrightarrow{O_1O_2} = -l_1.\vec{y}_1$.
- un bras secondaire 2 assimilé à une barre BO_2O_3. Il est en liaison pivot parfaite d'axe $(O_2, \vec{z}_2)$ caractérisé par le paramètre β avec le bras principal 1. On pose $\overrightarrow{O_2O_3} = -l_2.\vec{y}_2$.
- une nacelle 3 assimilée à un disque de centre O_3 et de rayon R. Elle est en liaison pivot parfaite d'axe $(O_3, \vec{y}_2)$ caractérisé par le paramètre φ avec le bras 2. On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel P tel que $\overrightarrow{O_3P} = -R.\vec{z}_3$.

Q.1. Construire les figures planes de repérage/paramétrage puis Exprimer les vecteurs vitesses instantanés de rotation $\overrightarrow{\Omega_{10}}$, $\overrightarrow{\Omega_{20}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{30}}$ de chacun des solides 1,2 et 3 dans leur mouvement respectif par rapport au bâti 0.

Q.2. Déterminer l'expression générale de la vitesse du point P associé au passager par rapport au bâti 0, notée $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$.

On donne ci-contre l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.



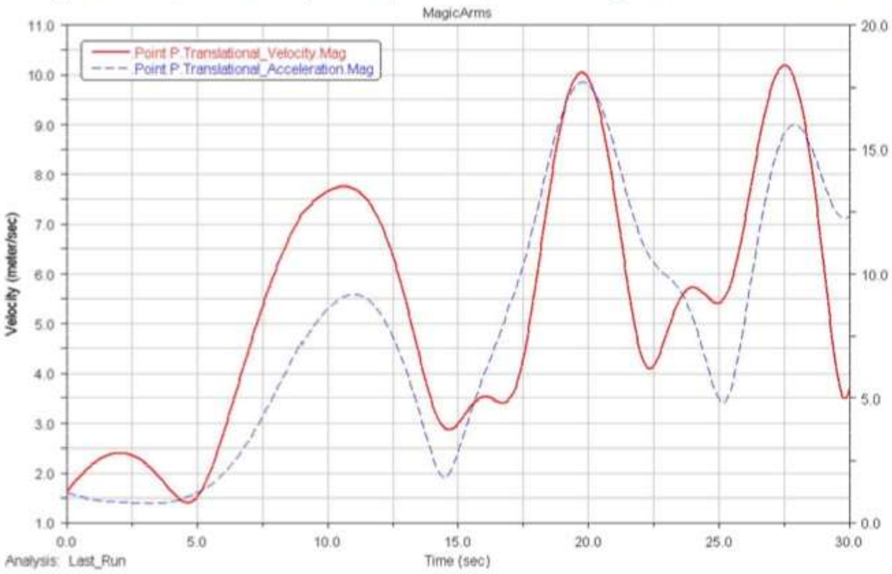
Q.3. Déterminer les valeurs des paramètres $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$ puis l'expression analytique des positions angulaires α(t), β(t) et φ(t) dans l'intervalle de temps [17-27] secondes en sachant qu'à l'instant t=17s, on a α= 10,5 rad, β= 3,76 rad et γ = -10,676 rad.

Q.4. Déterminer à partir des équations obtenues Q.3. les valeurs numériques à l'instant t_1=19,8 s de α, β et φ.

Q.5. On pose $\overrightarrow{V_{P,3/0}} = V_{x2}.\vec{x}_2 + V_{y2}.\vec{y}_2 + V_{z2}.\vec{z}_2$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2}, V_{y2} et V_{z2} puis les valeurs numériques de V_{x2}, V_{y2} et V_{z2} à l'instant t_1=19,8s. (Données : l_1 = 3,9m, l_2 = 2,87m, R = 2,61m).

Q.6. Déterminer l'expression générale de l'accélération du point P associé au passager par rapport au bâti 0, notée $\overrightarrow{\Gamma_{P,3/0}}$ dans l'intervalle de temps [17-27] secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Le graphe ci-contre, obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager P par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accélération du passager P par rapport au bâti 0 en fonction du temps.



Q.7. Comparer les résultats obtenus Q.4. à ceux du graphe pour un temps t_1=19,8 s.

Q.8. Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du cahier des charges.