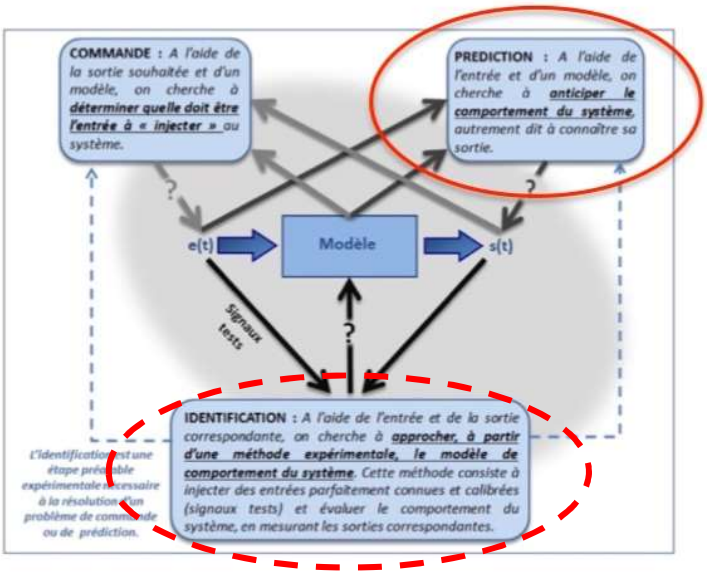
1. Position du problème

Le système étudié est modélisé : ***H(p)*** **connue**

L'entrée est connue : ***e(t)*** donc ***E(p)***

Objectif : **Déterminer *s(t)***



2. Réponse temporelle d'un système du premier ordre

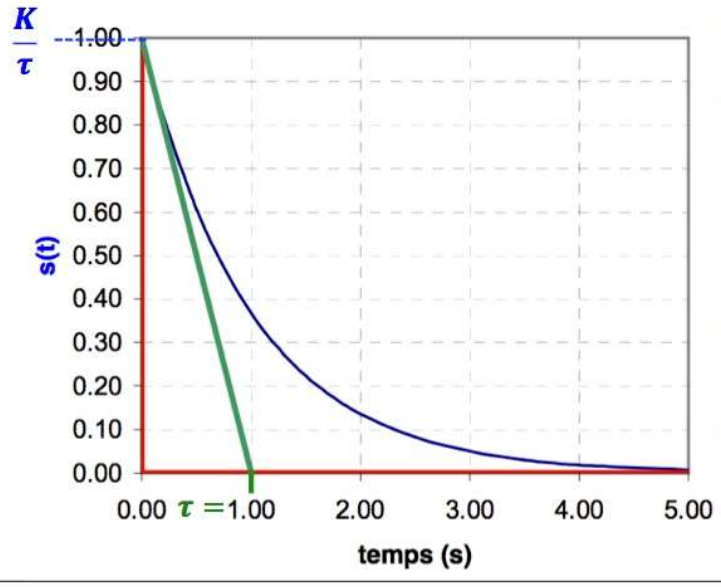
2.1 Fonction de transfert d'un système du premier ordre : $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}$

Soit un système modélisé par une fonction de transfert du premier ordre :

$$H(p)=\frac{K}{1+\tau\cdot p}$$ avec : **K : gain statique**

τ : constante de temps (s)

2.2 Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Fonction de transfert	$H(p)=\frac{K}{1+\tau\cdot p}$
Entrée	$e(t)=\delta(t)$ (Dirac) d'où $E(p)=1$
Sortie	$S(p)=H(p)\cdot E(p)=\frac{K}{1+\tau\cdot p}=\frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p}$ Donc : $\boxed{s(t)=\frac{K}{\tau}\cdot e^{\frac{-1}{\tau}\cdot t}}$ Domaine temporel : $e^{-at}.u(t)$ — Domaine de Laplace : $\frac{1}{p+a}$
Représentation graphique	**Remarques** :  $s(0)=\frac{K}{\tau}$ et $s'(0)=-\frac{K}{\tau^2}$ $T(t)=-\frac{K}{\tau^2}\cdot t+\frac{K}{\tau}$ La tangente à l'origine coupe donc l'axe des temps en t = τ $s(\tau)=0{,}37.\frac{K}{\tau}$ $s(3\tau)=0{,}05.\frac{K}{\tau}$ Donc $\boxed{Tr_{5\%}=3\tau}$

2.3 Réponse indicielle d'un système du premier ordre

Fonction de transfert

$$H(p)=\frac{K}{1+\tau\cdot p}$$

Entrée

$e(t)=E_0\cdot u(t)$ (échelon d'amplitude E_0) d'où $E(p)=\frac{E_0}{p}$

Sortie

$$S(p)=H(p)\cdot E(p)=\frac{K}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{E_0}{p}=\frac{KE_0}{p\cdot(1+\tau p)}=\frac{\frac{KE_0}{\tau}}{p\cdot(p+\frac{1}{\tau})}$$

Décomposition en éléments simples de S(p) :

Les pôles de S(p) sont $p_1=0$ et $p_2=-\frac{1}{\tau}$ (racines simples)

S(p) est donc de la forme : $S(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+\frac{1}{\tau}}$

Avec : $A=\lim_{p\to 0} p\cdot S(p)=KE_0$

$$B=\lim_{p\to -\frac{1}{\tau}}(p+\frac{1}{\tau})\cdot S(p)=-KE_0$$

D'où :

$$S(p)=KE_0\cdot\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}\right)$$

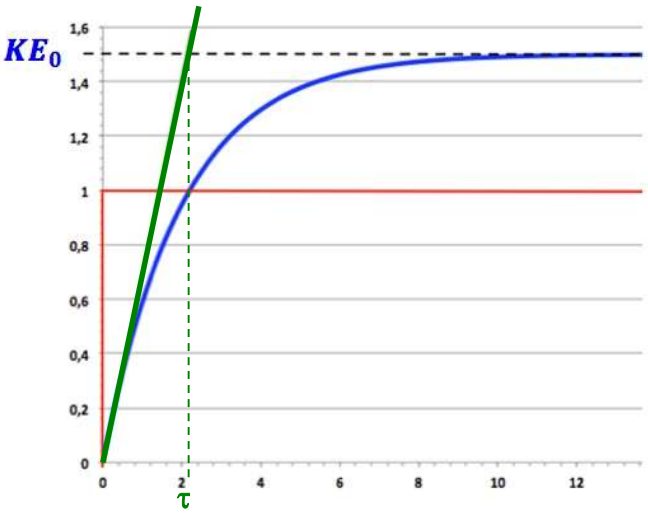
Rappel :

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$K.u(t)$	$\frac{K}{p}$
$e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

D'où :

$$\boxed{s(t)=KE_0\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}.t}\right)}$$

Représentation graphique



Remarques :

$s(0)=0$ et $s'(0)=\frac{KE_0}{\tau}$

$T(t)=\frac{KE_0}{\tau}\cdot t$

La tangente à l'origine coupe donc l'asymptote à t = τ.

$s(\tau)=0{,}63.KE_0$

$s(3\tau)=0{,}95.KE_0$

Donc $\boxed{Tr_{5\%}=3\tau}$

Ici : $E_0 = 1$

K = 1,5

τ = 2 s

2.4 Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

Fonction de transfert

$$H(p)=\frac{K}{1+\tau\cdot p}$$

Entrée

$e(t)=at\cdot u(t)$ (rampe de pente a) d'où $E(p)=\frac{a}{p^2}$

Sortie

$$S(p)=H(p)\cdot E(p)=\frac{K}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{a}{p^2}=\frac{Ka}{p^2\cdot(1+\tau p)}=\frac{\frac{Ka}{\tau}}{p^2\cdot(p+\frac{1}{\tau})}$$

Décomposition en éléments simples de S(p) :

Les pôles de S(p) sont $p_1=0$ (racine double) et $p_2=-\frac{1}{\tau}$ (racine simple)

S(p) est donc de la forme : $S(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+\frac{1}{\tau}}$

D'où :

Avec : $B=\lim_{p\to 0} p^2\cdot S(p)=Ka$

$C=\lim_{p\to -\frac{1}{\tau}}(p+\frac{1}{\tau})\cdot S(p)=Ka\tau$

Et : $A=-Ka\tau$

$$S(p)=Ka\cdot\left(\frac{-\tau}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{\tau}{p+\frac{1}{\tau}}\right)$$

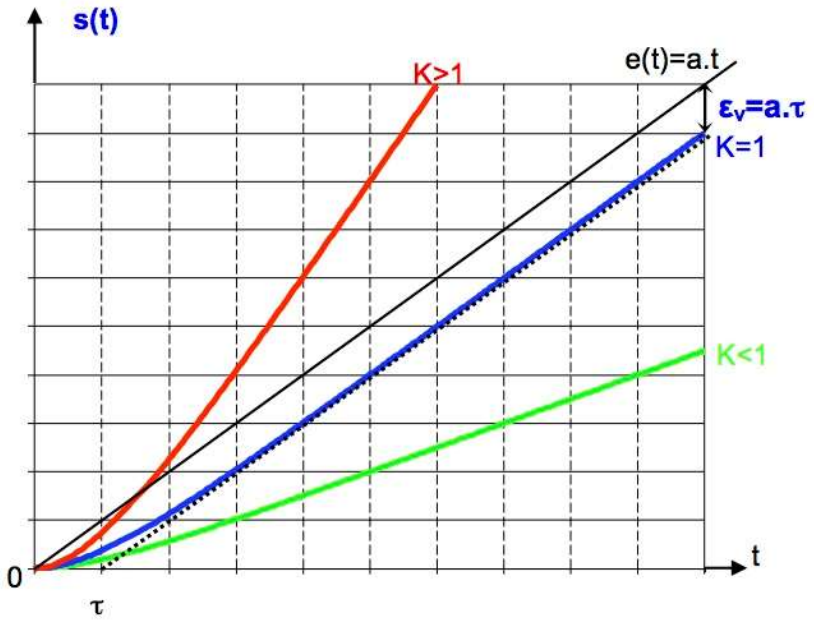
Rappel :

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$Kt.u(t)$	$\frac{K}{p^2}$

D'où :

$$s(t)=Ka\cdot\left((t-\tau)+\tau\cdot e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

Représentation graphique



Remarques :

$s(0)=0$

$s'(0)=0$

Asymptote :

$y(t)=Ka(t-\tau)$

3. Réponse temporelle d'un système du deuxième ordre

3.1. Fonction de transfert d'un système du deuxième ordre : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

Soit un système modélisé par une fonction de transfert du deuxième ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}\cdot p+\frac{1}{\omega_0^2}\cdot p^2}$$

avec : **K : gain statique**

ξ : amortissement

ω_0 : pulsation propre (rad.s^{-1})

3.2. Recherche des pôles de la fonction de transfert

Le comportement dynamique du système est toujours entièrement défini par les pôles et les zéros de la fonction de transfert.

Pour des fonctions de transfert complexes, il est donc judicieux de calculer au préalable les valeurs des pôles de la fonction de transfert du système puis de tracer la position de ces pôles dans le plan complexe afin d'étudier, dans un second temps, la réponse du système à des entrées types.

Dans le cas des systèmes du 2ème ordre, la fonction de transfert H(p) ne possède aucun zéro et deux pôles p_1 et p_2, racines du dénominateur, dont la nature dépend du signe du discriminant, donc de l'amortissement ξ :

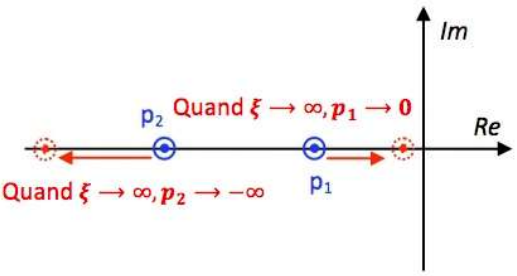
$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4}{\omega_0^2}\cdot(\xi^2 - 1)$ **Les pôles de la fonction de transfert dépendent donc de la valeur de ξ, il y a 3 cas de figure possibles** :

- **Cas ξ > 1 ⟹ Δ > 0**

$p_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ soit $p_1 = \omega_0\cdot\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)$ Remarque : $p_1.p_2 = \omega_0^2$

$p_2 = \omega_0\cdot\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)$

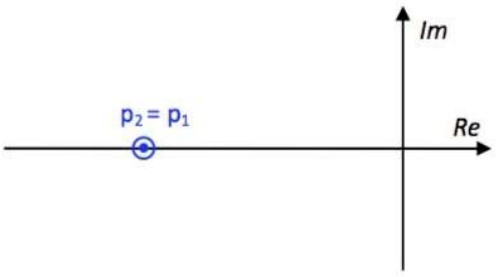
Les 2 pôles de H(p) sont 2 pôles réels négatifs que l'on peut représenter dans le plan complexe :



- **Cas ξ = 1 ⟹ Δ = 0**

$p_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ soit $p_1 = p_2 = -\omega_0$

H(p) admet donc **1 pôle réel double négatif** que l'on peut représenter dans le plan complexe :

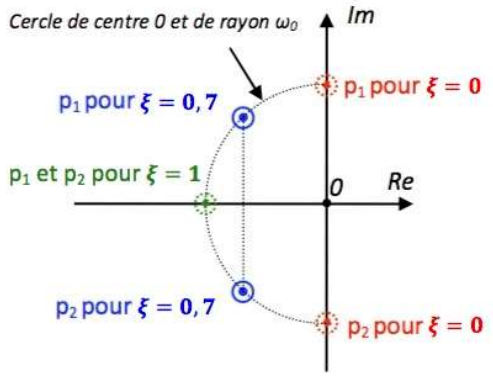


- **Cas $\xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0$**

$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ soit $p_1 = \omega_0 \cdot \left(-\xi + j \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)$ Remarque : $|p_1| = |p_2| = \omega_0$

$p_2 = \omega_0 \cdot \left(-\xi - j \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)$

Les 2 pôles de H(p) sont 2 pôles complexes conjugués que l'on peut représenter dans le plan complexe pour 3 valeurs particulières de ξ :



3.3. Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre

Le système est sollicité par une entrée de type échelon $e(t) = E_0.u(t)$ soit $E(p) = \frac{E_0}{p}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$

- **Comportement à l'origine et quand $t \to +\infty$ (RP) :**

Quelle que soit la valeur de ξ, un système du 2ème ordre est tel que : **la tangente à l'origine est horizontale**

En effet : $s'(0) = \lim_{t\to 0} s'(t) \overset{TVI}{=} \lim_{p\to+\infty} p.[p.S(p)] = \lim_{p\to+\infty} p^2.\frac{E_0}{p} \cdot \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2} = 0$

Quelle que soit la valeur de ξ, un système du 2ème ordre est tel que : **$s(+\infty)=KE_0$**

En effet : $s(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} s(t) \overset{TVF}{=} \lim_{p\to 0}[p.S(p)] = \lim_{p\to 0} p.\frac{E_0}{p} \cdot \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2} = KE_0$

- **Cas $\xi > 1$:**

Dans ce cas, H(p) admet 2 pôles réels négatifs p_1 et p_2.

La sortie peut donc s'écrire sous la forme : $S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K.{\omega_0}^2}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)}$

La décomposition en éléments simples de S(p) est donc de la forme :

$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{p-p_2}$

La méthode des limites permet rapidement de calculer A, B et C :

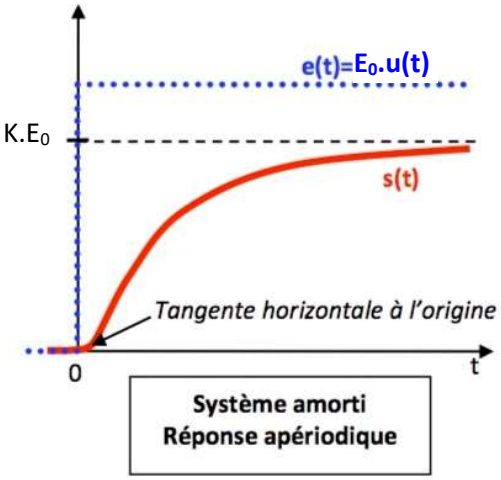
$A = KE_0 \quad B = \frac{KE_0{\omega_0}^2}{p_1\cdot(p_1-p_2)} = \frac{KE_0p_2}{(p_1-p_2)} \quad C = \frac{KE_0{\omega_0}^2}{p_2\cdot(p_2-p_1)} = \frac{KE_0p_1}{(p_2-p_1)}$

La réponse temporelle s(t) a donc pour expression :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{p_1-p_2} \cdot e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2-p_1} \cdot e^{p_2 t}\right)$$

régime permanent — *régime transitoire*

Représentation graphique pour $\xi > 1$ et K < 1



- **Cas ξ = 1 :**

Dans ce cas, H(p) admet 1 pôle réel double négatif $p_1 = p_2 = -\omega_0$.

La sortie peut donc s'écrire sous la forme : $S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K.{\omega_0}^2}{(p-p_1)^2}$

La décomposition en éléments simples de S(p) est donc de la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{(p-p_1)^2}$$

La méthode des limites permet rapidement de calculer A et C, B peut être obtenu pour une valeur particulière de p ou par identification :

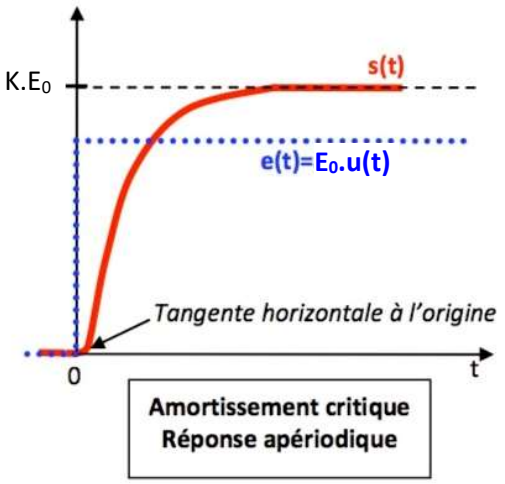
$$A = KE_0 \qquad B = -KE_0 \qquad C = -KE_0\omega_0$$

La réponse temporelle s(t) a donc pour expression :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot (1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 \cdot t \cdot e^{-\omega_0 t})$$

régime permanent — *régime transitoire*

Représentation graphique pour ξ = 1 et K > 1



Amortissement critique
Réponse apériodique

- **Cas ξ < 1 :**

Dans ce cas, H(p) admet 2 pôles complexes conjugués p_1 et p_2 :

$$p_1 = \omega_0 \cdot \left(-\xi + j \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) \quad \text{et}$$
$$p_2 = \omega_0 \cdot \left(-\xi - j \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)$$

La décomposition en éléments simples de S(p) donne :

$$S(p) = KE_0.\left(\frac{1}{p} - \frac{p+2.\xi.\omega_0}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+{\omega_0}^2}\right)$$

Puis en faisant apparaître un carré au dénominateur :

$$S(p) = KE_0.\left(\frac{1}{p} - \frac{p+2.\xi.\omega_0}{(p+\xi.\omega_0)^2+{\omega_0}^2.(1-\xi^2)}\right)$$

Puis en posant $\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}$ on a :

$$S(p) = KE_0.\left(\frac{1}{p} - \frac{p+2.\xi.\omega_0}{(p+\xi.\omega_0)^2+{\omega_p}^2}\right)$$

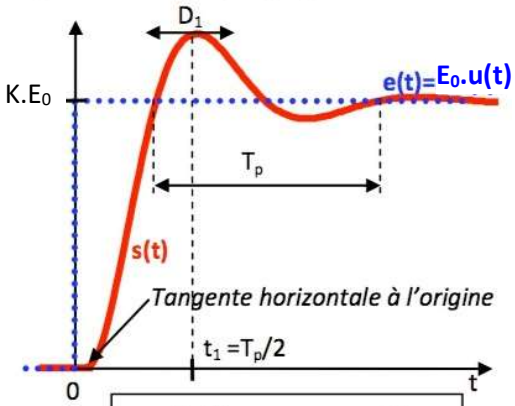
Soit : $S(p) = KE_0.\left(\frac{1}{p} - \frac{p+\xi.\omega_0}{(p+\xi.\omega_0)^2+{\omega_p}^2} - \frac{\xi.\omega_0}{(p+\xi.\omega_0)^2+{\omega_p}^2}\right)$

La réponse temporelle s(t) a donc pour expression :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \cos(\omega_p.t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_p.t)\right)$$

régime permanent — *régime transitoire*

Représentation graphique pour ξ < 1 et K = 1



Système sous amorti
Réponse pseudo-périodique

Pseudo-période : La réponse s(t) présente des oscillations amorties de période :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

1er dépassement : Le premier maximum (1er dépassement) apparaît à $t_1 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$

La valeur relative du 1er dépassement correspond alors à $D_1 = \frac{s(t_1)-s(+\infty)}{s(+\infty)}$ avec :

$$s(t_1) = s\left(\frac{\pi}{\omega_p}\right) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\xi\omega_0.\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \cos\left(\omega_p.\frac{\pi}{\omega_p}\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0.\frac{\pi}{\omega_p}} \cdot \sin\left(\omega_p.\frac{\pi}{\omega_p}\right)\right)$$

$$s(t_1) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 + e^{-\xi\omega_0 \cdot \frac{\pi}{\omega_p}}\right) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 + e^{-\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$$

D'où : $D_1 = \frac{s(t_1)-s(+\infty)}{s(+\infty)} = \frac{K \cdot E_0 \cdot \left(1+e^{-\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) - K \cdot E_0}{K \cdot E_0}$ Soit $\boxed{\mathbf{D_1 = e^{-\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}}$

Remarques :

- La valeur relative du 1er dépassement D1 (et des suivants) s'exprime en %.
- La valeur du dépassement ne dépend que de la valeur de l'amortissement ξ. On utilise cette particularité pour identifier ξ à partir d'un tracé expérimental, modélisable par la réponse indicielle avec dépassement d'un système d'ordre 2.
- Un abaque est souvent utilisé pour réaliser cette identification (voir annexe 1).

3.4. Temps de réponse à 5% et temps de réponse réduit

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% d'un système du 2ème ordre car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement ξ et de la pulsation propre ω_0.

On utilise alors un abaque (voir annexe 2) qui donne la valeur du temps de réponse réduit : $\mathbf{tr_{5\%}.\omega_0}$ en fonction du coefficient d'amortissement ξ. Il permet aussi l'identification de ω_0 sur un tracé expérimental modélisable par la réponse indicielle avec dépassement d'un système d'ordre 2.

Le temps de réponse minimum est obtenu pour un dépassement relatif de 5% ce qui correspond à un coefficient d'amortissement **ξ = 0,7**. On a alors $tr_{5\%}.\omega_0 = 3$ pour ξ = 0,7

À l'aide des abaques fournis en annexes 1 et 2, compléter le tableau correspondant aux courbes des réponses indicielles de l'annexe 3 (ω_0 = 2 rad.s^{-1} sur cet exemple) :

	ξ = 2	ξ = 1	ξ = 0,9	ξ = 0,7	ξ = 0,5	ξ = 0,3	ξ = 0,1	ξ = 0,01
D_1 en %								
$tr_{5\%}.\omega_0$								
$tr_{5\%}$ en s								

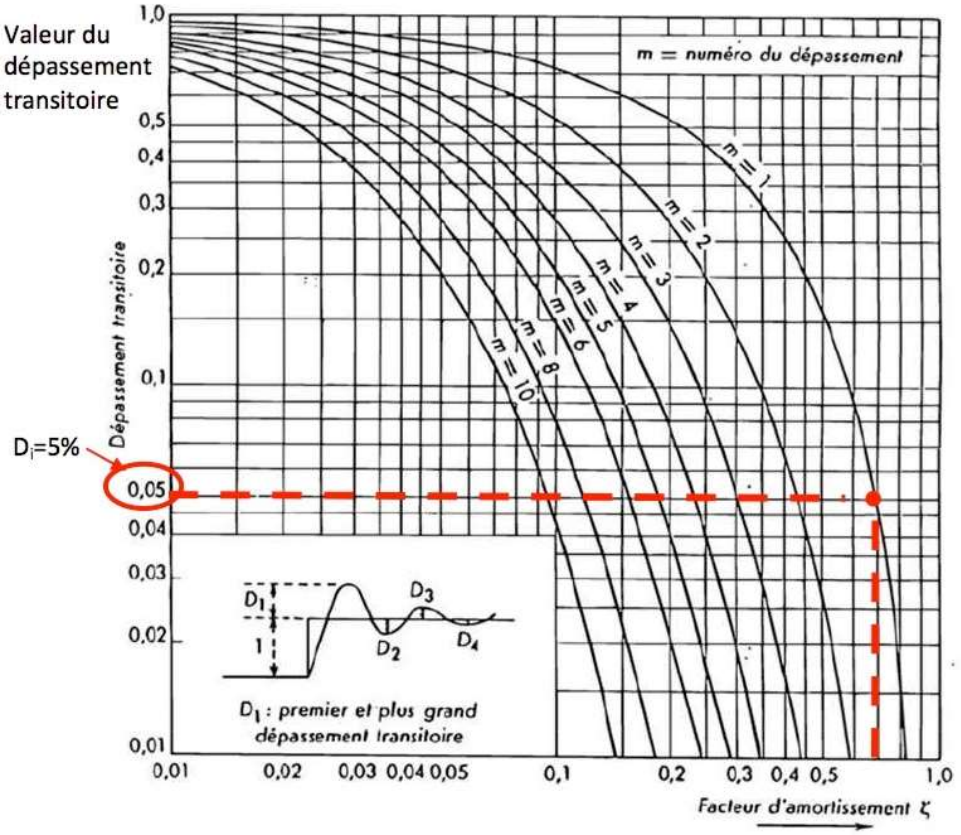
Bilan :

- pour ξ <<1 (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand,
- pour ξ = 0,7, le système présente un premier dépassement faible (D1 = 5%) avec le temps de réponse le plus faible possible,
- pour ξ = 1, le système présente le temps de réponse le plus faible pour une réponse sans dépassement,
- pour ξ >>1, il n'y a pas de dépassement mais le système est hyper amorti donc le temps de réponse est très grand.
- pour un même coefficient d'amortissement ξ, plus ω_0 augmente, plus le temps de réponse à 5% diminue, donc plus le système est rapide.

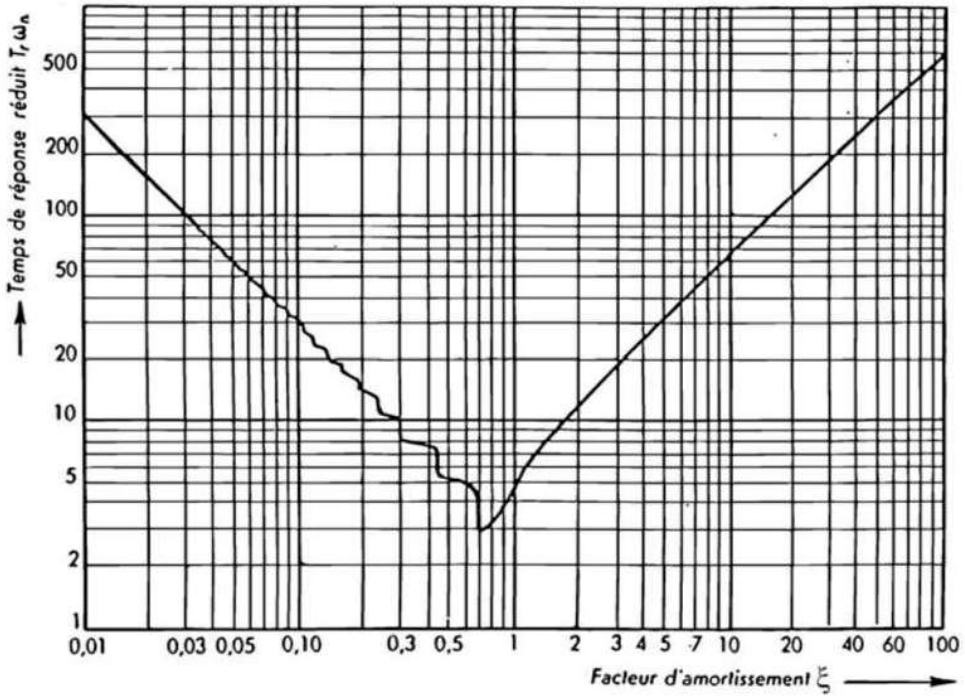
ANNEXE 1 : Valeurs des dépassements relatifs pour un système du 2ème ordre

Pour ξ=0,7 on ne remarque qu'un seul dépassement visible qui vaut 5%.

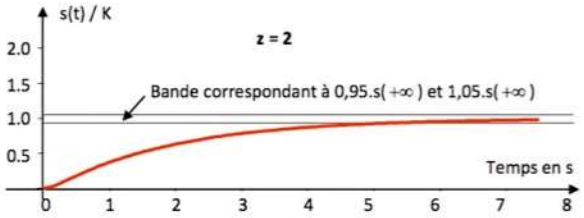
Pour ξ>0,82 il existe des dépassements mais qui ne sont pas visibles à l'œil (ils sont inférieurs à 1%).

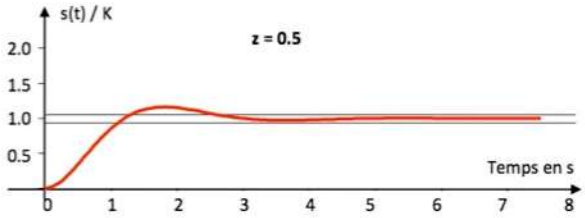


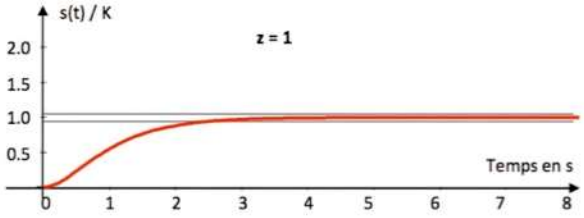
ANNEXE 2 : Temps de réponse réduit pour un système du 2ème ordre

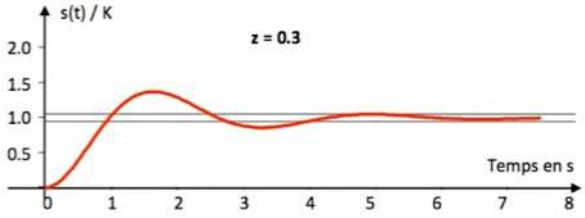


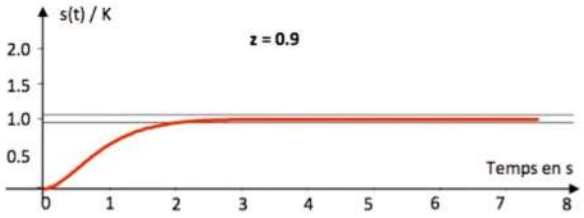
ANNEXE 3 :

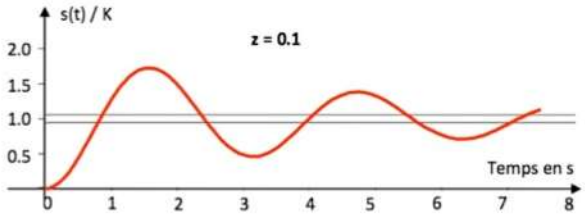

s(t) / K
z = 2
Bande correspondant à 0,95.s(+∞) et 1,05.s(+∞)
Temps en s

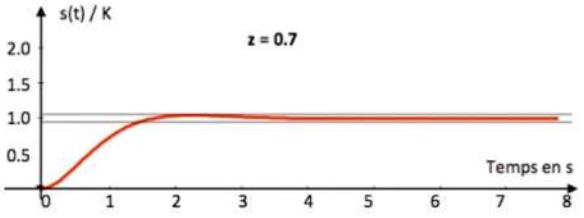

s(t) / K
z = 0.5
Temps en s

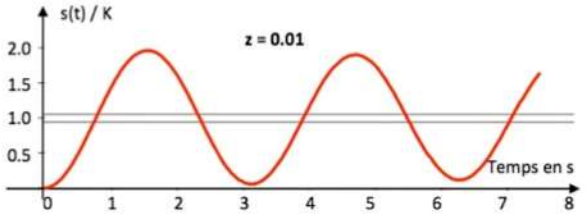

s(t) / K
z = 1
Temps en s


s(t) / K
z = 0.3
Temps en s


s(t) / K
z = 0.9
Temps en s


s(t) / K
z = 0.1
Temps en s


s(t) / K
z = 0.7
Temps en s


s(t) / K
z = 0.01
Temps en s