

EXERCICE 1 : Transformée de Laplace : Four électrique



La modélisation (équation thermique) d'un four thermique est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$2 \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 6\alpha \cdot \frac{ds(t)}{dt} + 4\alpha^2 \cdot s(t) = K \cdot e(t)$$

où : $e(t)$ représente la consigne de température,
 $s(t)$ représente la température du four,
 α et K sont des constantes réelles positives.

On suppose que les conditions initiales sont nulles :
 $s(0)=s'(0)=0$.

Question 1 : Déterminer la transformée de Laplace de l'équation précédente. En déduire $S(p)$ en fonction de $E(p)$.

Question 2 : Sachant que $e(t)$ est un échelon d'amplitude E_c , donner l'expression de $e(t)$ puis $E(p)$.

Question 3 : En déduire $S(p)$ en fonction des constantes α , K et E_c .

Question 4 : Déterminer la limite de $s(t)$ en $+\infty$.

Question 5 : Donner la valeur de l'erreur statique absolue. Quel type de performance est évalué par ce critère. Proposer une valeur de K pour améliorer cette performance.

Question 6 : Tracer l'allure de $s(t)$.

La méthode de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (non étudiée ici) nous permet d'écrire $S(p)$ sous la forme :

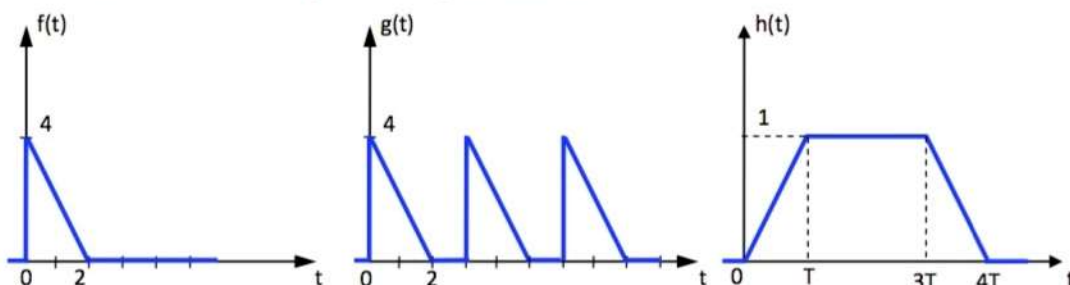
$$S(p) = \frac{KE_c}{4\alpha^2} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p + \alpha} + \frac{1}{p + 2\alpha} \right)$$

Question 7 : En déduire l'équation temporelle $s(t)$ du signal de sortie.

EXERCICE 2 : Transformée de Laplace :

Application du théorème du retard pour la modélisation de signaux

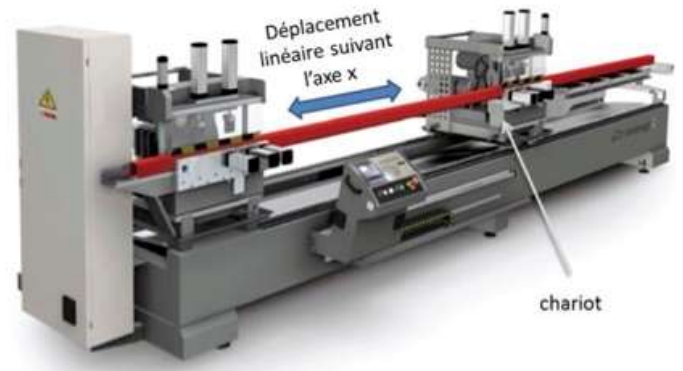
Déterminer les transformées de Laplace des signaux suivants :



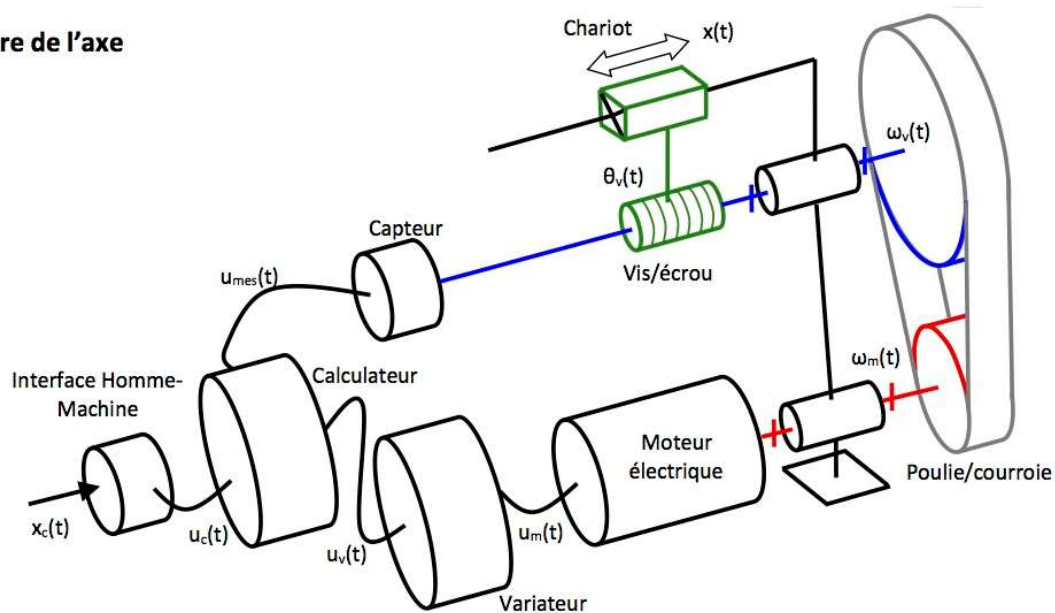
Présentation générale du système

On s'intéresse à l'axe linéaire d'une machine-outil à commande numérique.

Ce système est utilisé pour réaliser différents usinages (trous, lamages, méplats, ...) sur des pièces cylindriques de grande longueur.



Structure de l'axe



La chaîne d'énergie-puissance est constituée :

- d'un variateur (pré-actionneur), contrôlant la tension d'alimentation du moteur à courant continu notée $u_m(t)$ en V à partir de la tension de commande notée $u_v(t)$ en V,
- d'un moteur à courant continu de vitesse angulaire $\omega_m(t)$ en rad.s^{-1} ,
- d'un réducteur poulies-courroie de vitesse angulaire de sortie $\omega_v(t)$ en rad.s^{-1} ,
- d'un système vis-écrou qui permet de transformer le mouvement de rotation continue de la vis (position angulaire $\theta_v(t)$ en rad) en un mouvement de translation continue du chariot (position linéaire $x(t)$ en mm).

La chaîne d'information est constituée :

- d'une interface homme-machine qui traduit la consigne de position $x_c(t)$ en mm, en une tension image $u_c(t)$ en V,
- d'un codeur incrémental qui mesure la position angulaire de la vis et en informe le calculateur avec la tension image $u_{mes}(t)$ en V,
- d'un calculateur qui compare ensuite cette mesure $u_{mes}(t)$ avec l'image de la consigne $u_c(t)$, puis amplifie/corrige l'image de l'erreur $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_{mes}(t)$ issue de cette comparaison, pour élaborer un signal de commande en tension $u_v(t)$ pour le variateur.

Modèle de connaissance des composants et de l'axe :

Le calculateur est modélisé par : $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_{mes}(t)$ et $u_v(t) = K_c \cdot \varepsilon(t)$

Le variateur est modélisé par : $u_m(t) = K_v \cdot u_v(t)$

Le moteur électrique est modélisé par : $\tau_m \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m \cdot u_m(t)$

Le réducteur poulies-courroie a un rapport de réduction $r < 1$ tel que $\omega_v(t) = r \cdot \omega_m(t)$

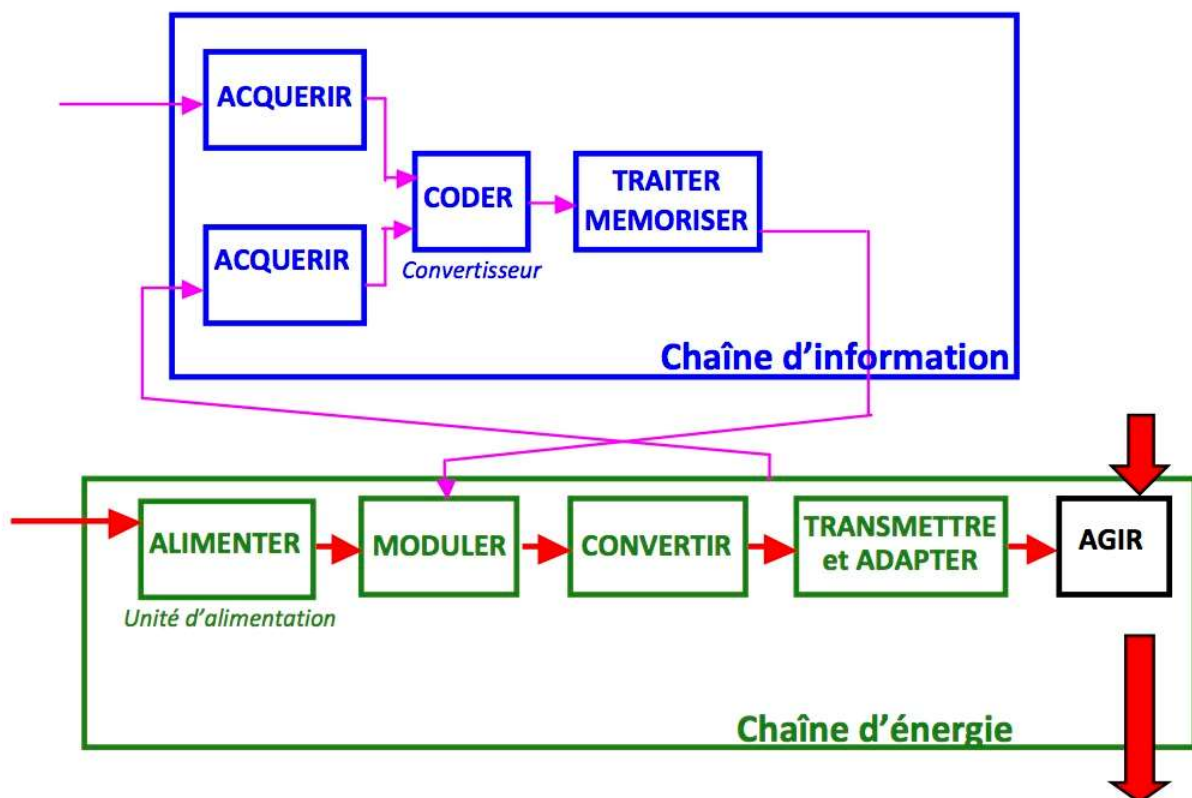
Le gain du transmetteur vis-écrou est noté K_{VE} en $\text{mm} \cdot \text{rad}^{-1}$

Le gain du codeur incrémental est noté K_{cap} en $\text{V} \cdot \text{rad}^{-1}$.

Le gain de l'interface homme-machine est noté K_{IHM} en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside) et que toutes les constantes sont positives.

Q1. Compléter la chaîne fonctionnelle de l'axe linéaire :



Q2. Modélisation de l'axe linéaire :

À l'aide du modèle de connaissance des différents composants et de l'axe, élaborer les schémas blocs élémentaires de chacun des composants :

Composant	Modèle de connaissance dans le domaine symbolique	Schéma bloc élémentaire
Calculateur		
Variateur		
Moteur		
Réducteur poulies-courroie		
Système Vis/Ecrou		
Codeur incrémental		
IHM		

Q3. À partir des schémas blocs élémentaires, compléter page suivante le schéma blocs de l'axe linéaire complet.

On indiquera sous chacun des blocs le nom du composant et dans le bloc sa fonction de transfert.

On indiquera toutes les variables entre blocs.

Q4. Déterminer la relation temporelle entre $\omega_v(t)$ et $\theta_v(t)$.

En déduire la fonction de transfert permettant de « passer » de $\Omega_v(p)$ à $\Theta_v(p)$.

Q5. Déterminer le gain de l'IHM afin que l'axe linéaire soit correctement asservi.

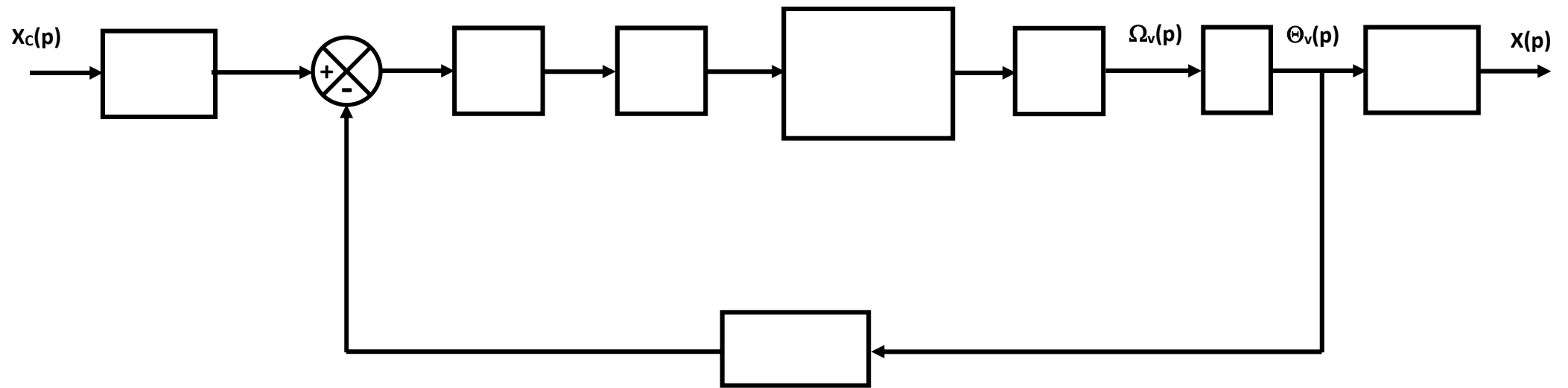
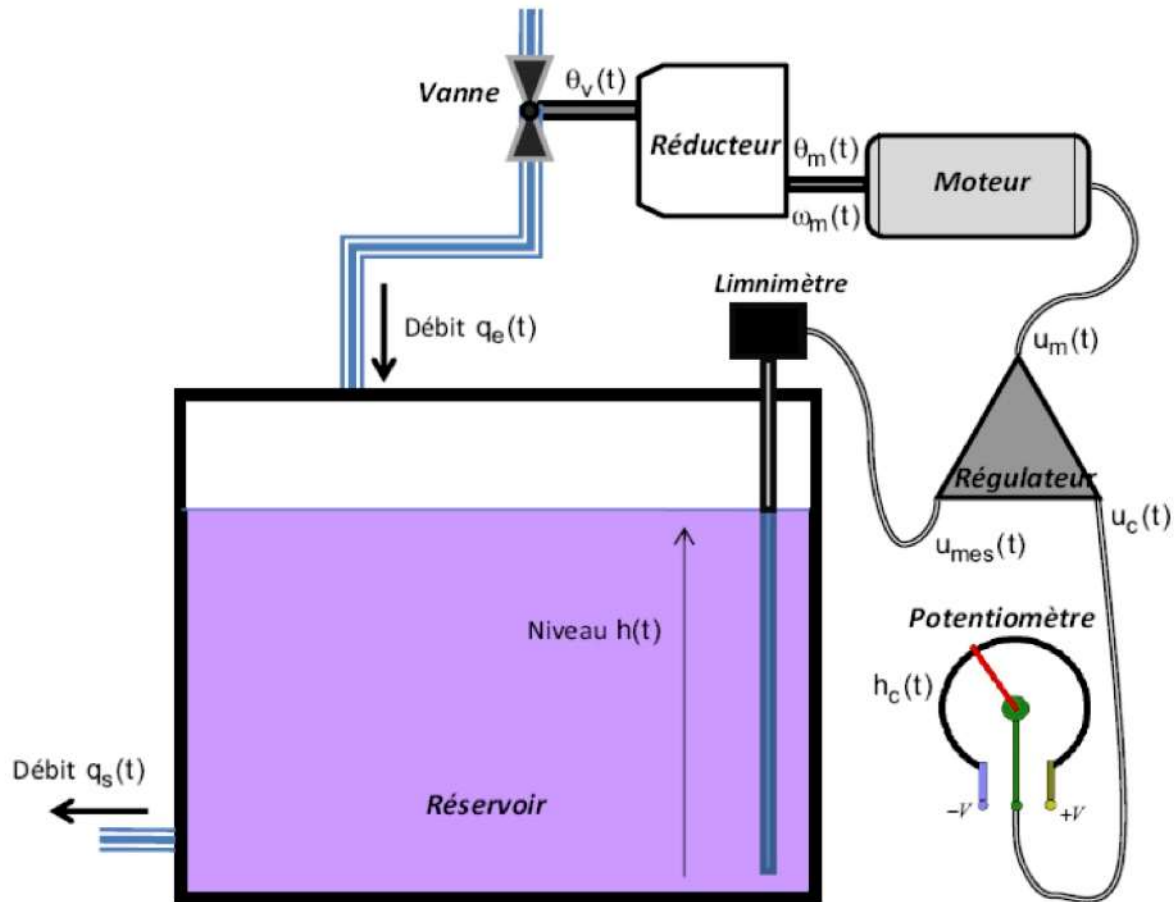


Schéma-blocs de l'axe linéaire complet

EXERCICE 4 : Modélisation sous forme de schéma blocs : Régulation de niveau

La figure ci-dessous représente une régulation de niveau d'eau $h(t)$ dans un réservoir :

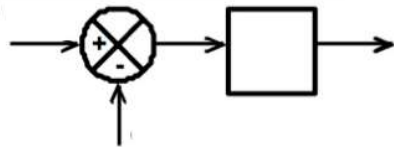
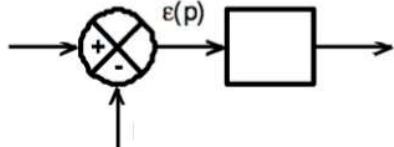


Constituant	Caractéristique	Modèle de connaissance
Moteur	Il tourne à la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ pour une tension de commande $u_m(t)$	$\tau \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m \cdot u_m(t)$
Réducteur	Il réduit l'angle de l'axe de rotation du moteur $\theta_m(t)$ en un angle d'ouverture $\theta_v(t)$ de la vanne	$\theta_v(t) = r \cdot \theta_m(t)$
Vanne	Elle délivre un débit $q_e(t)$ pour un angle d'ouverture $\theta_v(t)$	$q_e(t) = K_v \cdot \theta_v(t)$
Réservoir	Il est de section constante S , et a pour débit d'entrée $q_e(t)$ et de sortie $q_s(t)$	$q_e(t) - q_s(t) = S \cdot \frac{dh(t)}{dt}$
Limnimètre (capteur)	Il traduit le niveau d'eau $h(t)$ atteint dans le réservoir en tension $u_{mes}(t)$	$u_{mes}(t) = a \cdot h(t)$
Potentiomètre (transducteur)	Il traduit la consigne de niveau d'eau $h_c(t)$ en tension de consigne $u_c(t)$	?
Régulateur (comparateur + correcteur)	Il compare la tension de consigne $u_c(t)$ à la tension mesurée $u_{mes}(t)$ pour en déduire l'écart $\varepsilon(t)$, puis corrige (amplifie) cet écart $\varepsilon(t)$ en une tension de commande du moteur $u_m(t)$	$\varepsilon(t) = u_c(t) - u_{mes}(t)$ $u_m(t) = A \cdot \varepsilon(t)$

où τ , K_m , r , K_v , S , a et A sont des coefficients constants.

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside).

Question 1 : Appliquer, pour chacun des modèles de connaissance des constituants du système, la transformation de Laplace. Puis indiquer sa fonction de transfert, et enfin en déduire son schéma-bloc.

Composant	Relation temporelle	Relation dans le domaine de Laplace	Schéma-bloc
Moteur	$\tau \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m \cdot u_m(t)$		
Réducteur	$\theta_v(t) = r \cdot \theta_m(t)$		
Vanne	$q_e(t) = K_v \cdot \theta_v(t)$		
Réservoir	$q_e(t) - q_s(t) = S \cdot \frac{dh(t)}{dt}$		
Limnimètre (capteur)	$u_{mes}(t) = a \cdot h(t)$		
Régulateur (comparateur + correcteur)	$\epsilon(t) = u_c(t) - u_{mes}(t)$ $u_m(t) = A \cdot \epsilon(t)$		

Le modèle de connaissance du potentiomètre (transducteur) n'est jamais donné dans les sujets de concours, il faut donc le retrouver !

Question 2 : Donner cette relation entre $h_c(t)$ et $u_c(t)$ qui assure que $\epsilon(t)$ soit bien une image de l'erreur du niveau d'eau. En déduire le schéma-bloc correspondant au potentiomètre.

La relation entre vitesse angulaire $\omega_m(t)$ et position angulaire $\theta_m(t)$ du moteur, n'est aussi jamais donnée dans les sujets de concours, il faut donc la connaître.

Question 3 : Donner donc cette relation temporelle générale qui lie vitesse et position. En déduire le schéma-bloc qui passe de $\Omega_m(p)$ à $\Theta_m(p)$

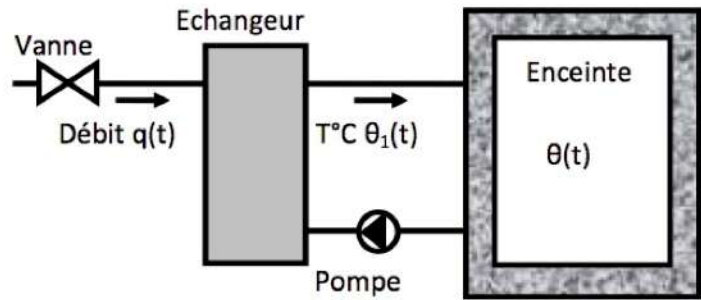
Question 4 : Donner la variable d'entrée et la variable de sortie du système. Puis, représenter le schéma-bloc du système entier en précisant le nom des constituants sous les blocs, ainsi que les flux d'énergie ou d'information entre les blocs.

Question 5 : En supposant $q_s(t) = 0$, déterminer la fonction de transfert $F_1(p) = \frac{H(p)}{H_c(p)}$.

EXERCICE 5 : Modélisation sous forme de schéma bloc : Enceinte chauffante

Le système représenté ci contre est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique. Une vanne permet de réguler le débit dans l'échangeur.

On note $\alpha(t)$ l'angle d'ouverture de la vanne, $q(t)$ le débit dans l'échangeur, $\theta_1(t)$ la température en sortie de l'échangeur, $\theta(t)$ la température de l'enceinte.



On donne les modèles de connaissance qui régissent le système :

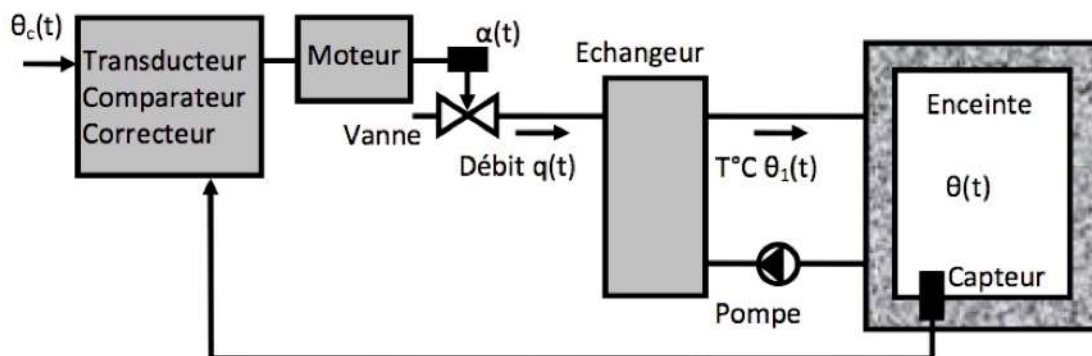
- $q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$ (loi de fonctionnement de la vanne donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture de la vanne).
- $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$ (loi de transfert de chaleur dans l'échangeur).
- $\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$ (loi de transfert de chaleur dans l'enceinte).

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles. L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne $\alpha(t)$ et la sortie, la température de l'enceinte $\theta(t)$.

Q.1. Traduire dans le domaine de Laplace les équations du modèle de connaissance. En déduire les différents modèles de comportement et les fonctions de transfert associées.

Q.2. Représenter le système par un schéma-bloc faisant intervenir les 3 blocs précédemment définis.

Afin de réguler la température, on choisit de motoriser la vanne. On installe un capteur dans l'enceinte qui permet de mesurer la température et la de traduire en une tension $u_{mes}(t)$ (on peut modéliser le capteur par un gain pur $K_{mes}=0,02$). La tension $u_{mes}(t)$ est comparée à la tension de consigne $u_c(t)$ issue d'un transducteur de fonction de transfert $T(p)$. En fonction de cet écart amplifié par un correcteur de gain K_c , la vanne s'ouvre ou se ferme. Le schéma ci-dessous précise l'architecture du système.



On donne la fonction de transfert du moteur qui est : $M(p) = \frac{\alpha(p)}{U_m(p)} = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)}$.

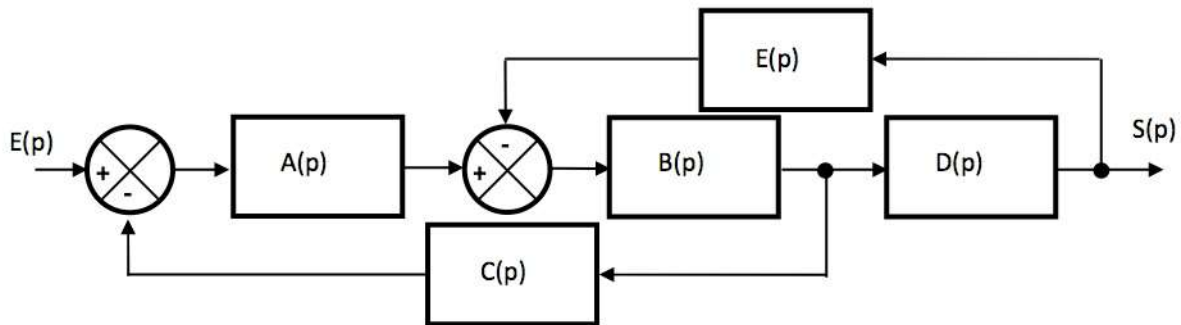
Q.3. Représenter par un schéma-bloc le système régulé dont l'entrée est la température $\theta_c(p)$.

Q.4. Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur de façon à annuler l'écart $\epsilon(p)$ quand la température de consigne et la température de l'enceinte sont égales ?

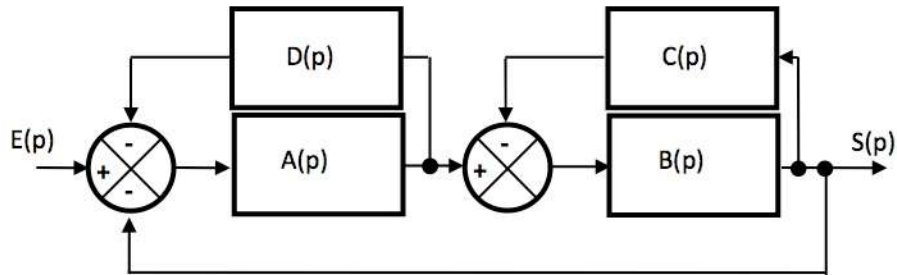
EXERCICE 6 : Manipulation et simplification de schémas blocs en présence de boucles imbriquées

Exprimer les fonctions de transfert des systèmes modélisés sous la forme des schémas blocs suivants :

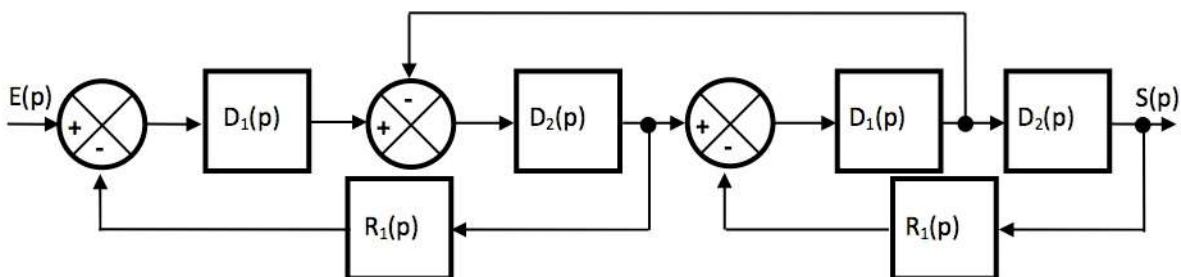
Système 1 :



Système 2 :

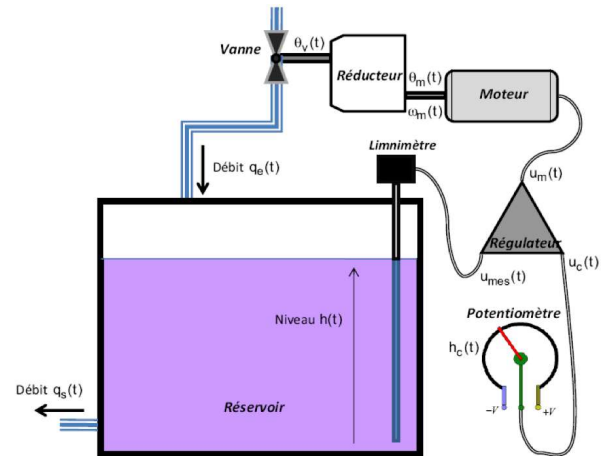


Système 3 :



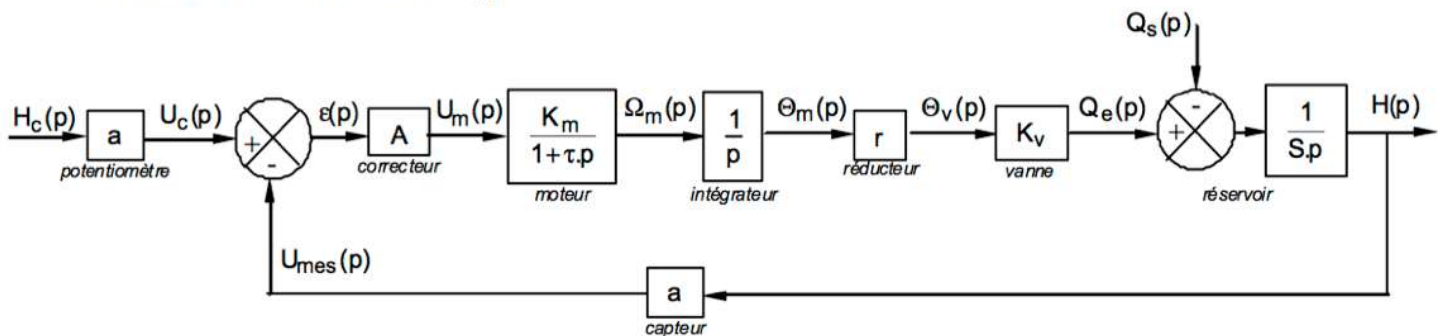
EXERCICE 7 : Théorème de superposition : Régulation de niveau (suite)

Nous avons établi dans l'exercice 3 que nous pouvons **modéliser ce système** de régulation du niveau de l'eau dans le réservoir **sous la forme du schéma bloc suivant** :



Variable d'entrée (consigne) : $h_c(t)$

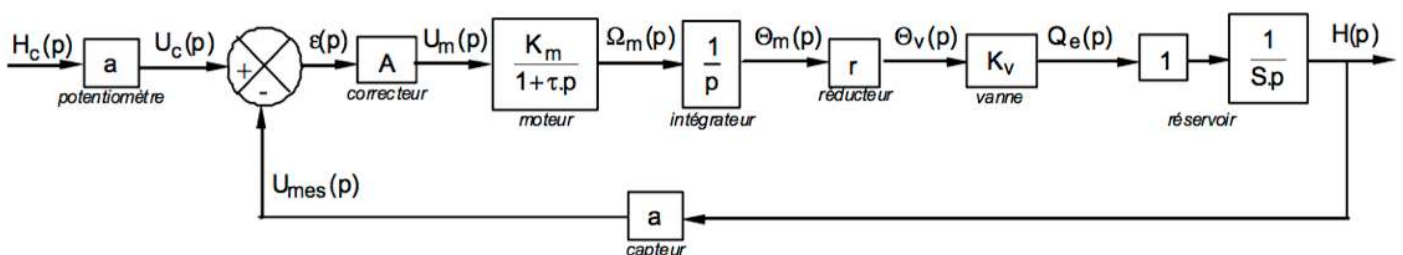
Variable de sortie à asservir : $h(t)$



L'objectif est maintenant d'exprimer rapidement $H(p)$, réponse du système, en fonction de la consigne de hauteur $H_c(p)$ et de la perturbation $Q_s(p)$

1° Afin de **déterminer l'expression de $H(p)$ en fonction de $H_c(p)$ et de $Q_s(p)$** , nous allons d'abord fixer $Q_s(p) = 0$.

Le schéma bloc initial devient :



Ce qui permet de mettre en évidence :

- le potentiomètre de gain **a en série** avec
- une boucle fermée d'entrée $U_c(p)$ et de sortie $H(p)$.

La **relation de Black** nous a permis de déterminer la fonction de transfert de la boucle fermée **FTBF(p)** :

$$FTBF(p) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{S}{aAK_m r K_v} \cdot p^2 + \frac{\tau \cdot S}{aAK_m r K_v} \cdot p^3}$$

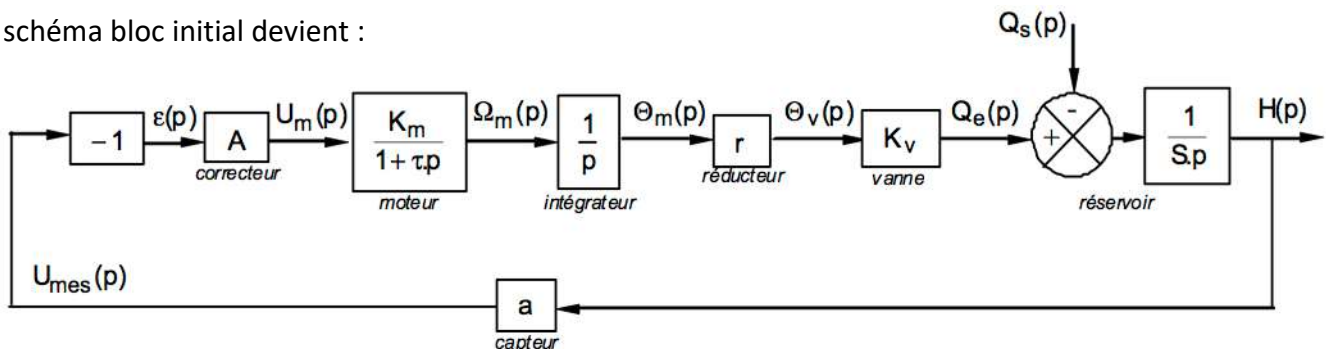
Finalement, $\mathbf{F_1(p)} = \left. \frac{H(p)}{H_c(p)} \right|_{Q_s(p)=0}$ est égale au produit de a par FTBF(p).

Soit :

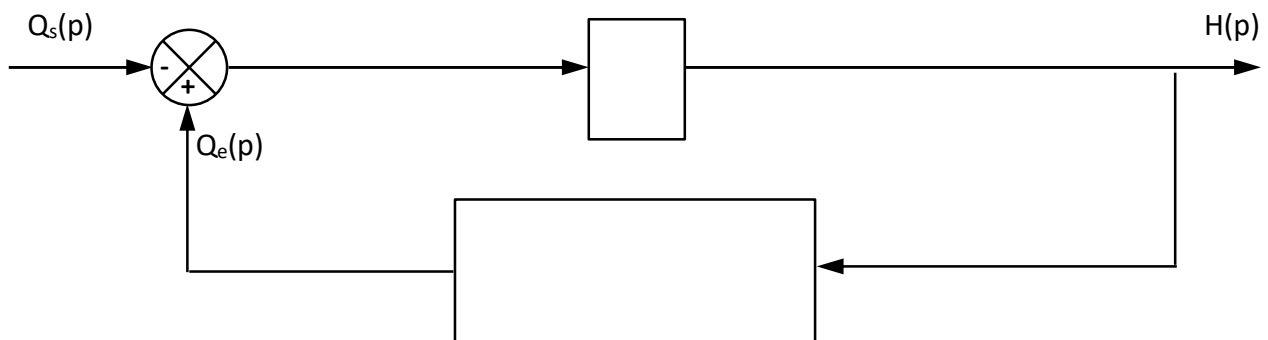
$$\mathbf{F_1(p)} = \frac{1}{1 + \frac{S}{aAK_m r K_v} \cdot p^2 + \frac{\tau \cdot S}{aAK_m r K_v} \cdot p^3}$$

2° Dans un deuxième temps, nous fixons **H_c(p) = 0**.

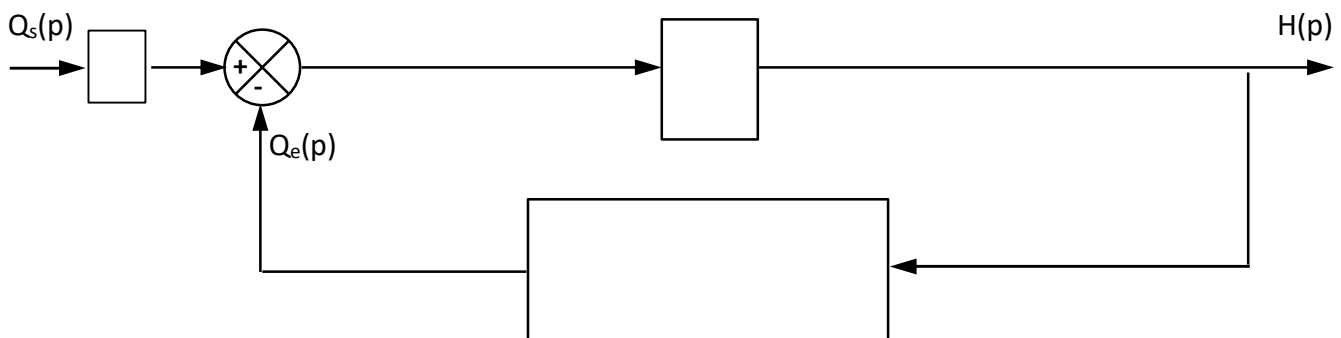
Le schéma bloc initial devient :



En déterminant la fonction de transfert des 7 blocs en série, nous pouvons simplifier le schéma bloc sous la forme :



Afin de mettre en évidence la forme d'une **Boucle Fermée (BF)**, nous adaptions alors les signes :



Ce qui permet de déterminer $\mathbf{F}_2(\mathbf{p}) = \frac{H(p)}{Q_s(p)} \Big|_{H_c(p)=0}$ en appliquant la même démarche que pour $F_1(p)$:

3° Interprétation de $F_1(p)$:

Lorsque la consigne de hauteur $h_c(t)$ est un échelon d'amplitude H_0 : $h_c(t) = H_0$ pour $t > 0$.

On peut donc exprimer :

$$H_c(p) =$$

D'où :

$$H(p) = F_1(p) \cdot H_c(p) =$$

Le **théorème de la valeur finale** permet donc d'exprimer la hauteur atteinte en régime permanent :

$$h(+\infty) =$$

Ou encore l'erreur statique :

$$\varepsilon_s = h_c(+\infty) - h(+\infty) =$$

4° Interprétation de $F_2(p)$:

Lorsque la perturbation $q_s(t)$ est un échelon d'amplitude Q_0 : $q_s(t) = Q_0$ pour $t > 0$.

On peut donc exprimer :

$$Q_s(p) =$$

L'effet de la perturbation est une variation de hauteur du niveau d'eau dans le réservoir que l'on peut exprimer par :

$$\Delta H(p) = \underbrace{F_1(p) \cdot H_c(p) + F_2(p) \cdot Q_s(p)}_{\text{Hauteur d'eau dans le réservoir en présence de la consigne et de la perturbation}} - \underbrace{F_1(p) \cdot H_c(p)}_{\text{Hauteur d'eau dans le réservoir en absence de perturbation}}$$

Soit :

$$\Delta H(p) = F_2(p) \cdot Q_s(p) =$$

Le **théorème de la valeur finale** permet donc d'exprimer la variation de hauteur d'eau dans le réservoir en régime permanent :

$$\Delta h(+\infty) =$$

5° Le **théorème de superposition** permet enfin d'exprimer **$H(p)$** (réponse) en fonction de **$H_c(p)$** (consigne) et de **$Q_s(p)$** (perturbation) :