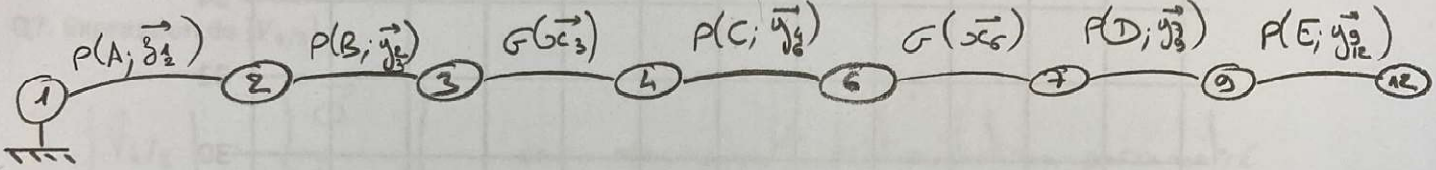
DOCUMENT RÉPONSES

Nom :	Note :
Prénom :	
Observations :	

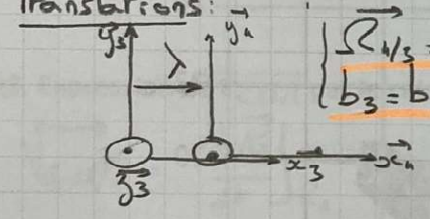
CORRIGÉ

Q1. Graphe des liaisons :

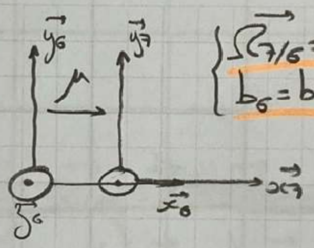


Q2. Figures géométrales :

Translations :

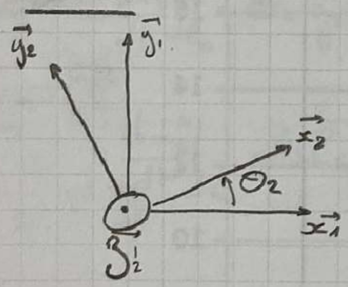


$$\begin{cases}\vec{\Omega}_{4/3}=\vec{0}\\ b_3=b_4\end{cases}$$

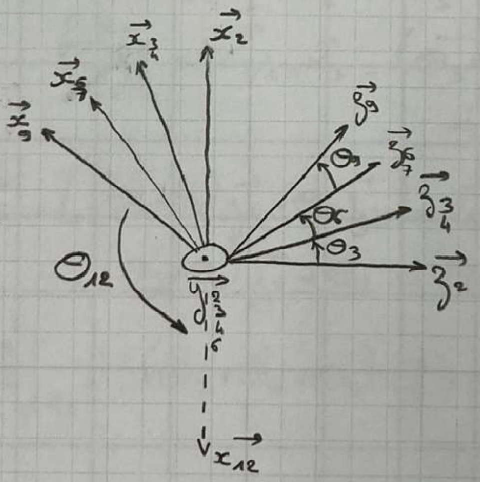


$$\begin{cases}\vec{\Omega}_{7/6}=\vec{0}\\ b_6=b_7\end{cases}$$

Rotations :



$$\vec{\Omega}_{2/1}=\dot{\theta}_2\,\vec{z}_1$$



$$\vec{\Omega}_{3/2}=\dot{\theta}_3\,\vec{y}_2$$

$$\vec{\Omega}_{6/4}=\dot{\theta}_6\,\vec{y}_2$$

$$\vec{\Omega}_{9/7}=\dot{\theta}_9\,\vec{y}_2$$

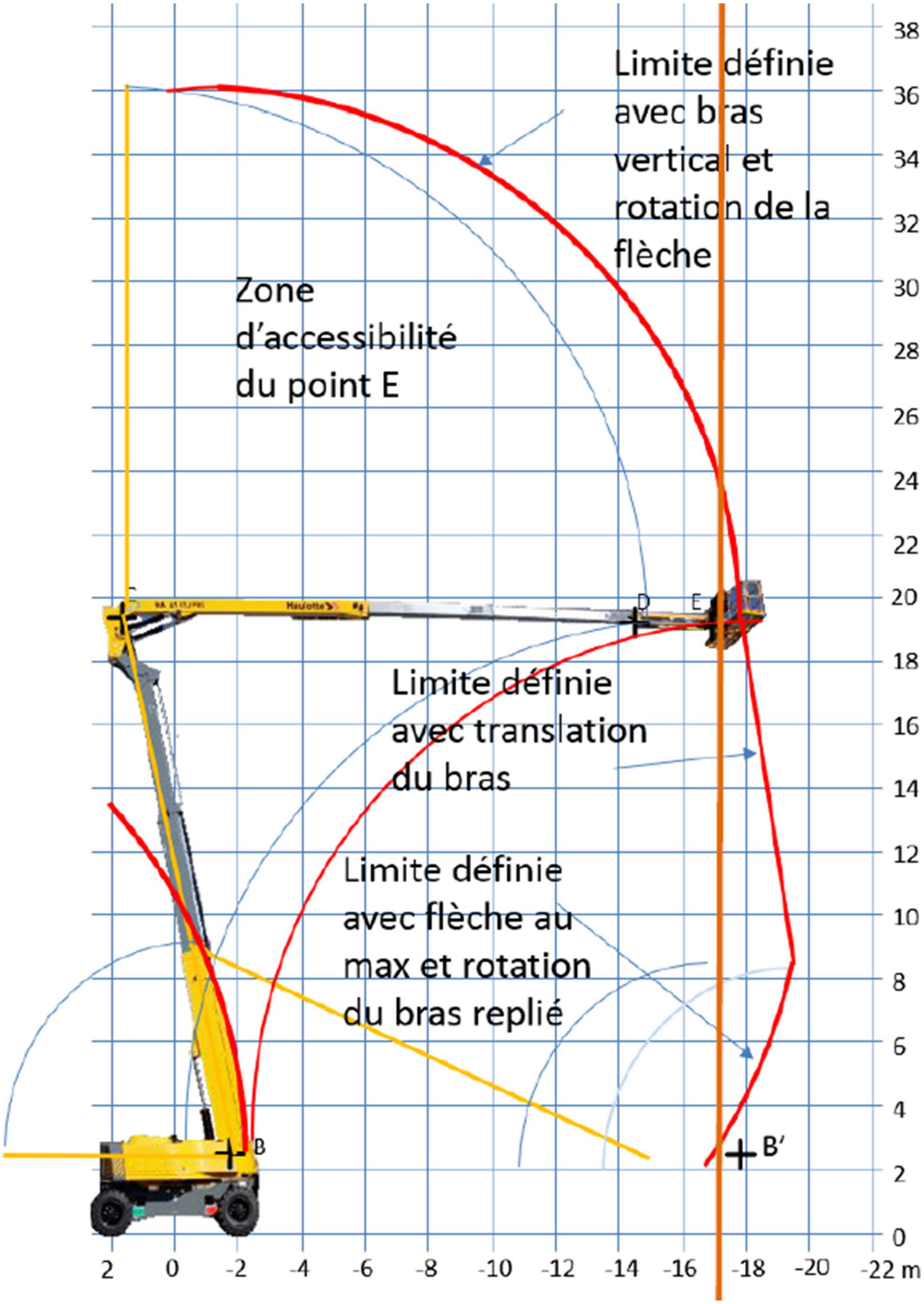
NB : Par la suite on notera $\vec{y}_2$ le vecteur commun $\vec{y}_2=\vec{y}_3=\dots=\vec{y}_9$

Q3. Expression de θ_{12} en fonction de θ_3, θ_6 et θ_9

D'après ci-dessus : $\boxed{\theta_{12}=\pi-(\theta_3+\theta_6+\theta_9)}$

Q4. Zone d'accessibilité géométrique

La zone d'accessibilité géométrique correspond à la ligne rouge



Q6. Expression de $\{V_{2/1}\}$:

$$\{V_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} \dot{\theta}_2 \vec{z_1} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A \quad \text{car } A \in \Delta_{21}$$

Q7. Expression de $\{V_{4/3}\}$:

$$\{V_{4/3}\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{x_{3}} \end{matrix}\right\}_{\forall P}$$

car mouvement de translation paramétré par $\lambda(t)$

Q8. Expression de $\overrightarrow{V_{G,12/1}}$ par le calcul direct :

$$\overrightarrow{V_{G,12/1}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right]_{R_1} \quad \text{avec } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG}$$

$$= -(L_2 + X)\vec{x_2} + \lambda \vec{x_3} + \mu \vec{x_6} + l_9 \vec{x_9}$$

Or $\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{R_1} = \dot{\theta}_2 \vec{y_2}$; $\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_1} = \vec{\Omega}_{3/1} \wedge \vec{x_3} = (\dot{\theta}_3 \vec{y_2} + \dot{\theta}_2 \vec{z_1}) \wedge \vec{x_3}$

$$= -\dot{\theta}_3 \vec{z_3} + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3 \vec{y_2}$$

$$\left.\frac{d\vec{x_6}}{dt}\right]_{R_1} = \vec{\Omega}_{6/1} \wedge \vec{x_6} = [(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_6)\vec{y_2} + \dot{\theta}_2 \vec{z_1}] \wedge \vec{x_6}$$

$$= -(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_6)\vec{z_6} + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_3 + \theta_6)\vec{y_2}$$

Par analogie : $\left.\frac{d\vec{x_9}}{dt}\right]_{R_1} = -(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_9)\vec{z_9} + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_3 + \theta_6 + \theta_9)\vec{y_2}$

D'où

$$\overrightarrow{V_{G,12/1}} = -(L_2 + X)\dot{\theta}_2 \vec{y_2} + \dot{\lambda}\vec{x_3} + \lambda(-\dot{\theta}_3 \vec{z_3} + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3 \vec{y_2}) + \dot{\mu}\vec{x_6}$$
$$+ \mu[-(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_6)\vec{z_6} + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_3 + \theta_6)\vec{y_2}]$$
$$+ l_9[-(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_9)\vec{z_9} + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_3 + \theta_6 + \theta_9)\vec{y_2}]$$

Q8. Expression de $\overrightarrow{V_{G,12/1}}$ par composition des mouvements et champ des vecteurs vitesse :

$\overrightarrow{V_{G,12/1}} = \overrightarrow{V_{G,12/9}} + \overrightarrow{V_{G,9/7}} + \overrightarrow{V_{G,7/6}} + \overrightarrow{V_{G,6/4}} + \overrightarrow{V_{G,4/3}} + \overrightarrow{V_{G,3/2}} + \overrightarrow{V_{G,2/1}}$

⊛ $\overrightarrow{V_{G,12/9}}$: $12/9 = R(E;\vec{y_2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{V_{G,12/9}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{E,12/9}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{GE} \wedge \overrightarrow{\Omega_{12/9}} = X\vec{x_2} \wedge \dot{\theta}_{12}\vec{y_2} = X\dot{\theta}_{12}\vec{z_2}$

⊛ $\overrightarrow{V_{G,9/7}}$: $9/7 = R(D;\vec{y_2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{V_{G,9/7}} = \overrightarrow{GD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{9/7}} = (X\vec{x_2} - L_9\vec{x_9}) \wedge \overrightarrow{\Omega_{9/7}} = (X\vec{x_2} - L_9\vec{x_9}) \wedge \dot{\theta}_9\vec{y_2}$

$= \dot{\theta}_9(X\vec{z_2} - L_9\vec{z_9})$

⊛ $\overrightarrow{V_{G,7/6}}$: $7/6 = T(\vec{x_6})$

$\Rightarrow \overrightarrow{V_{G,7/6}} = \mu\vec{x_6}$

⊛ $\overrightarrow{V_{G,6/4}}$: $6/4 = R(C;\vec{y_2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{V_{G,6/4}} = \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{6/4}} = (X\vec{x_2} - L_9\vec{x_9} - \mu\vec{x_6}) \wedge \dot{\theta}_6\vec{y_2}$

$= \dot{\theta}_6(X\vec{z_2} - L_9\vec{z_9} - \mu\vec{z_6})$

⊛ $\overrightarrow{V_{G,4/3}}$ $4/3 = T(\vec{x_3})$

$\Rightarrow \overrightarrow{V_{G,4/3}} = \dot{\lambda}\vec{x_3}$

⊛ $\overrightarrow{V_{G,3/2}}$: $3/2 = R(B;\vec{y})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{G,3/2}} = \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = (X\vec{x_2} - L_9\vec{x_9} - \mu\vec{x_6} - \lambda\vec{x_3}) \wedge \dot{\theta}_3\vec{y_2}$$

$$= \dot{\theta}_3(X\vec{z_2} - L_9\vec{z_9} - \mu\vec{z_6} - \lambda\vec{z_3})$$

⊛ $\overrightarrow{V_{G,2/1}}$: $2/1 = R(A;\vec{z_i})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{G,2/1}} = \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = (X\vec{x_2} - L_9\vec{x_9} - \mu\vec{x_6} - \lambda\vec{x_3} + L_2\vec{x_2}) \wedge \dot{\theta}_2\vec{z_i}$$

$$= \dot{\theta}_2\left[-(X+L_2)\vec{y_2} + L_9\cos(\theta_3+\theta_6+\theta_9)\vec{y_2} + \mu\cos(\theta_3+\theta_6)\vec{y_2} + \lambda\cos\theta_3\vec{y_2}\right]$$

Or d'après Q3. $\theta_{12} = \pi - (\theta_3+\theta_6+\theta_9) \Rightarrow \dot{\theta}_{12} = -(\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6+\dot{\theta}_9)$

donc $X(\dot{\theta}_{12}+\dot{\theta}_9+\dot{\theta}_6+\dot{\theta}_3)\vec{z_2} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ on retrouve l'expression déterminée par le calcul direct

Q8. Expression de $\overrightarrow{\Gamma_{G,12/1}}$:

Lorsque (2) est fixe par rapport à (1), $\dot{\theta}_2 = 0$. De plus $\theta_2 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2$

Donc $\overrightarrow{V_{G,12/1}} = \dot{\lambda}\vec{x_3} - \lambda\dot{\theta}_3\vec{z_3} + \dot{\mu}\vec{x_6} - \mu(\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6)\vec{z_6} - L_9(\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6+\dot{\theta}_9)\vec{z_9}$

D'où

$$\overrightarrow{\Gamma_{G,12/1}} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_{G,12/1}}}{dt}\right|_{R_1}$$

Or $\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right|_{R_1} = -\dot{\theta}_3\vec{z_3}$ $\quad\left.\frac{d\vec{x_6}}{dt}\right|_{R_1} = -(\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6)\vec{z_6}$

$\left.\frac{d\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\theta}_3\vec{x_3}$ $\quad\left.\frac{d\vec{z_6}}{dt}\right|_{R_1} = (\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6)\vec{x_6}$ $\quad\left.\frac{d\vec{z_9}}{dt}\right|_{R_1} = (\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6+\dot{\theta}_9)\vec{x_9}$

D'où

$$\overrightarrow{\Gamma_{G,12/1}} = \ddot{\lambda}\vec{x_3} - \dot{\lambda}\dot{\theta}_3\vec{z_3} - (\dot{\lambda}\dot{\theta}_3 + \lambda\ddot{\theta}_3)\vec{z_3} - \lambda\dot{\theta}_3^2\vec{x_3} + \ddot{\mu}\vec{x_6} - \dot{\mu}(\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6)\vec{z_6}$$
$$- \left[\dot{\mu}(\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6) + \mu(\ddot{\theta}_3+\ddot{\theta}_6)\right]\vec{z_6} - \mu(\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6)^2\vec{x_6}$$
$$- L_9\left[(\ddot{\theta}_3+\ddot{\theta}_6+\ddot{\theta}_9)\vec{z_9} + (\dot{\theta}_3+\dot{\theta}_6+\dot{\theta}_9)^2\vec{x_9}\right]$$

Q10. Simplification de $\overrightarrow{V_{G,12/1}}$:

Seul le pendulaire est en mouvement

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{V_{G,12/1}} = -L_g \dot{\theta}_9 \overrightarrow{z_9}}$$

Q11. Expression de la composante verticale de $\overrightarrow{V_{G,12/1}}$:

La composante verticale de $\overrightarrow{V_{G,12/1}}$ est alors V_v telle que :

$$V_v = \overrightarrow{V_{G,12/1}} \cdot \overrightarrow{z_1} = -L_g \dot{\theta}_9 \overrightarrow{z_9} \cdot \overrightarrow{z_1} = -L_g \dot{\theta}_9 \cos(\theta_3 + \theta_6 + \theta_9)$$

$$= -L_g \dot{\theta}_9 \cos(\pi - \theta_{12})$$

$$\Rightarrow \boxed{V_v = L_g \dot{\theta}_9 \cos \theta_{12}}$$

Q12. Calcul de $\dot{\theta}_{9max}$ et de $\ddot{\theta}_9$:

Pour $-60° < \theta_{12} < 60°$, on a $\frac{1}{2} < \cos \theta_{12} < 1$

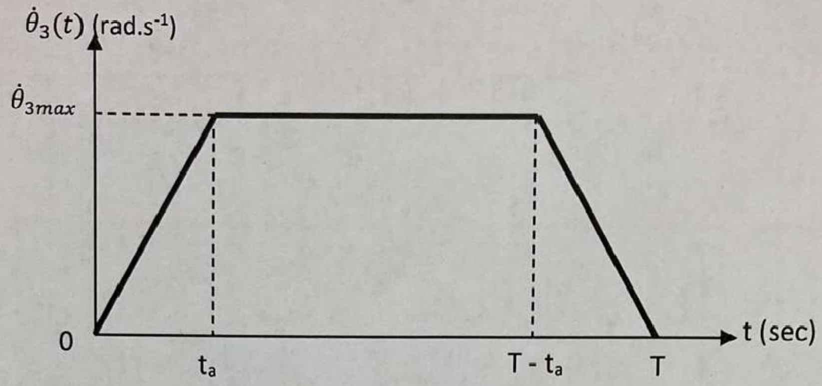
Donc $\dot{\theta}_{9max} = \frac{2V_v}{L_g}$ AN : $V_v = 1 \ m.s^{-1}$ (CDC) $\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{9max} \simeq 0{,}67 \ rad.s^{-1}}$

En faisant l'hypothèse d'un mouvement uniformément accéléré, on a

$\ddot{\theta}_9 = \frac{\dot{\theta}_{9max}}{0{,}5}$ AN : $\boxed{\ddot{\theta}_9 \simeq 1{,}34 \ rad.s^{-2}}$

$\rightarrow$ temps d'accélération (CDC)

Q13. Relation entre $\dot{\theta}_{3max}$, T et t_a :



L'aire sous la courbe $\dot{\theta}_3(t)$ correspond à l'angle parcouru par le bras (3) pour passer de la position horizontale à la position déployée $\Rightarrow \Delta\theta_3 = 80° = 80 \times \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{4\pi}{9}$

Donc :

$$\frac{\left[T + (T - 2t_a)\right] \times \dot{\theta}_{3max}}{2} = \frac{4\pi}{9}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(T - t_a)\,\dot{\theta}_{3max} = \frac{4\pi}{9}}$$

Q14. Calcul de $\dot{\theta}_{3max}$ et de $\ddot{\theta}_3$:

$$\begin{cases} \text{On a } t_a = 2\,s \\ \text{On veut } T = 15\,s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_{3max} = \frac{4\pi}{9 \times 13}$$

<u>AN:</u> $\boxed{\dot{\theta}_{3max} \simeq 0{,}1 \text{ rad}.s^{-1}}$

Q15. Maintien de l'horizontalité du panier :

Structure en parallélogramme déformable

=> 12/8 = mouvement de translation à trajectoire circulaire.

=> pas de rotation de 12/8

=> si (8) est maintenu horizontal, alors (12) le sera...