

Durée de l'épreuve : 3h00

Aucun document autorisé - Calculatrice autorisée

CORRIGÉ

Systeme de stationnement automatique

d'après Centrale Supélec MP2021



Q1. À partir du diagramme des exigences et de la figure 2, identifier le ou les capteurs à ultrasons pouvant participer au respect de l'exigence 1.4. Faire de même pour l'exigence 1.6.1.

Id 1.4. : capteurs a, b, c et d.

Id 1.6. : tous les capteurs.

Q2. Déterminer la condition que la grandeur ΔT_p doit vérifier pour que la longueur L d'une place de stationnement respecte l'exigence 1.4. Cette condition est fonction de V_d et L_v .

Id 1.4. impose $L > L_v + 2 * 0,5$. Or $L = \Delta T_p \cdot V_d$. Il faut donc $\Delta T_p > \frac{L_v + 1}{V_d}$

Q3. Déterminer la condition sur le temps T_e pour que la largeur d'une place de stationnement respecte l'exigence 1.4.

Durant le temps T_e , l'onde émise par le capteur parcourt la distance $2(D+e)$ à la vitesse V_s : $2(D + e) = V_s \cdot T_e$

Id 1.4. impose $e > e_v + 0,15$. Il faut donc $\frac{V_s \cdot T_e}{2} - D > e_v + 0,15$. Soit $T_e > \frac{2(e_v + 0,15 + D)}{V_s}$

Q4. Parmi tous les paramètres géométriques définis dans le tableau 1 ainsi que sur la figure 6, identifier ceux qui sont propres au véhicule et ceux qui se déduisent directement des informations des capteurs à ultrasons.

Que reste-t-il donc à déterminer afin que la géométrie de la trajectoire du point F soit définie ?

Paramètres propres au véhicule : L_F, L_v, e_v

Paramètres déduits des informations des capteurs : L, e, D, L_a, d_r .

Il reste donc à déterminer R afin que la géométrie de la trajectoire du point F soit définie.

Q5. Les coordonnées du point P dans le repère R_0 sont notées x_p et y_p : $\overrightarrow{OP} = x_p \cdot \overrightarrow{x_0} + y_p \cdot \overrightarrow{y_0}$. Déterminer l'expression de x_p et y_p en fonction des paramètres géométriques L, e, L_F, d_r, L_a et D . Le rayon R n'étant pas encore déterminé, il ne doit pas apparaître dans les expressions de x_p et y_p .

$$x_p = \frac{1}{2} \overrightarrow{O_1 O_2} \cdot \overrightarrow{x_0} \quad \text{d'où} \quad x_p = \frac{1}{2} (L - L_a - L_F)$$

$$y_p = \frac{1}{2} \overrightarrow{O F_f} \cdot \overrightarrow{y_0} \quad \text{d'où} \quad y_p = \frac{1}{2} (D + e - d_r)$$

Q6. Déterminer l'expression de R en fonction de L, L_F et L_a qui permettra de définir les cercles C_1 et C_2 .

D'après la figure 6 on a : $\cos(-45^\circ) = \frac{L - L_a - L_F}{2R}$ d'où $R = \frac{L - L_a - L_F}{\sqrt{2}}$

Q7. Exprimer dans R_0 les coordonnées x et y du point F parcourant la portion de cercle C_2 en fonction de R et θ_2 :

$$\vec{OF} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0.$$

Préciser l'intervalle dans lequel θ_2 doit varier.

D'après les figures 6 et 7 on a : $\vec{OF} = \vec{OO_1} + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2F} = R \cdot \vec{y}_0 + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2F}$

En projection sur \vec{x}_0 : $x = 2R \cos(-45^\circ) - R \cdot \sin\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)$

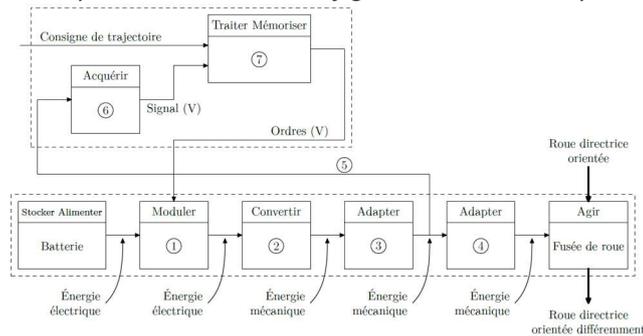
En projection sur \vec{y}_0 : $y = R + 2R \sin(-45^\circ) + R \cdot \cos\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)$

Finalement :
$$x = R(\sqrt{2} + \cos(\theta_2))$$

Et
$$y = R(1 - \sqrt{2} + \sin(\theta_2))$$

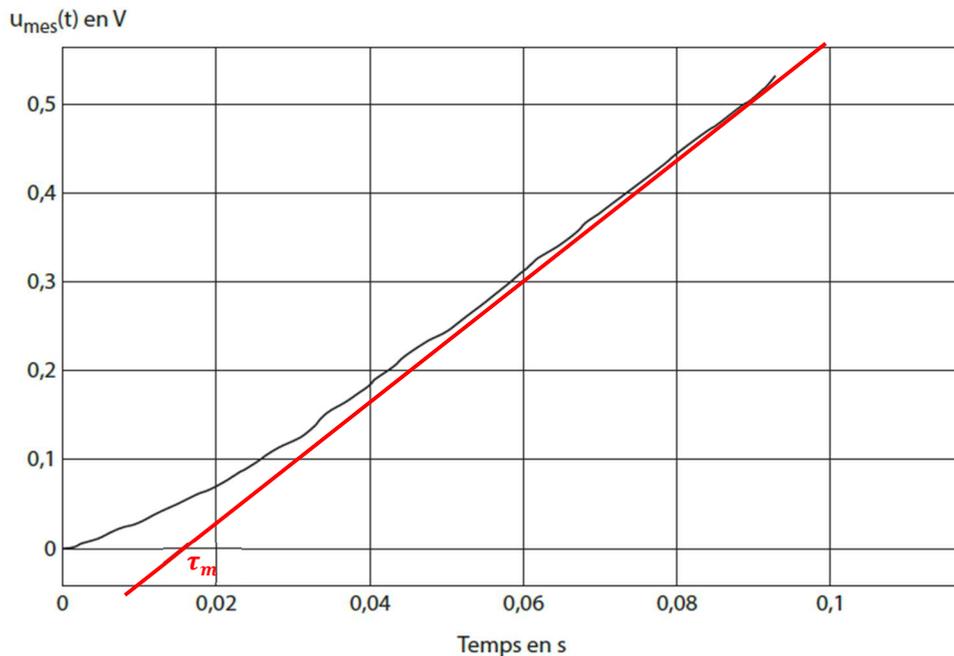
θ_2 variant entre 90° et 135° .

Q8. À partir des documents relatifs à la direction du véhicule RC fournis figures 27 à 29 ci-dessous, identifier à quoi correspondent les numéros figurant sur la description chaîne d'énergie / chaîne d'information du **document réponses**.



1	Hacheur
2	Moteur à courant continu
3	Réducteur
4	Bras du servomoteur et transmission
5	Position angulaire en sortie du réducteur
6	Potentiomètre
7	Microcontrôleur

Q9. À partir de l'expression temporelle de $u_{mes}(t)$ donnée précédemment, déduire de l'essai figure 17 les valeurs numériques des constantes K_m et τ_m . Il est rappelé que $K_c = 1,05 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$. **Tout tracé jugé utile sera reporté sur le document réponses.**



La courbe représentative de $u_{mes}(t)$ présente en $+\infty$ une asymptote d'équation $y(t) = K_m K_c K_r u_0 (t - \tau_m)$ telle que $y(\tau_m) = 0$. On lit graphiquement $\tau_m = 0,015 \text{ s}$

Le coefficient directeur de cette asymptote est $a = K_m K_c K_r u_0$.

Graphiquement on mesure $a = \frac{0,5 - 0}{0,09 - 0,015} = 6,7$

On déduit $K_m = \frac{a}{K_c K_r u_0} = \frac{6,7}{1,05 \cdot \frac{1}{120} \cdot 3}$ d'où $K_m = 255 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

Q10. Déduire les valeurs numériques de k_e et du produit $R \cdot J_m$.

$$k_e = \frac{1}{K_m} \text{ d'où } \boxed{k_e = 0,004 \text{ rad}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{V}}$$

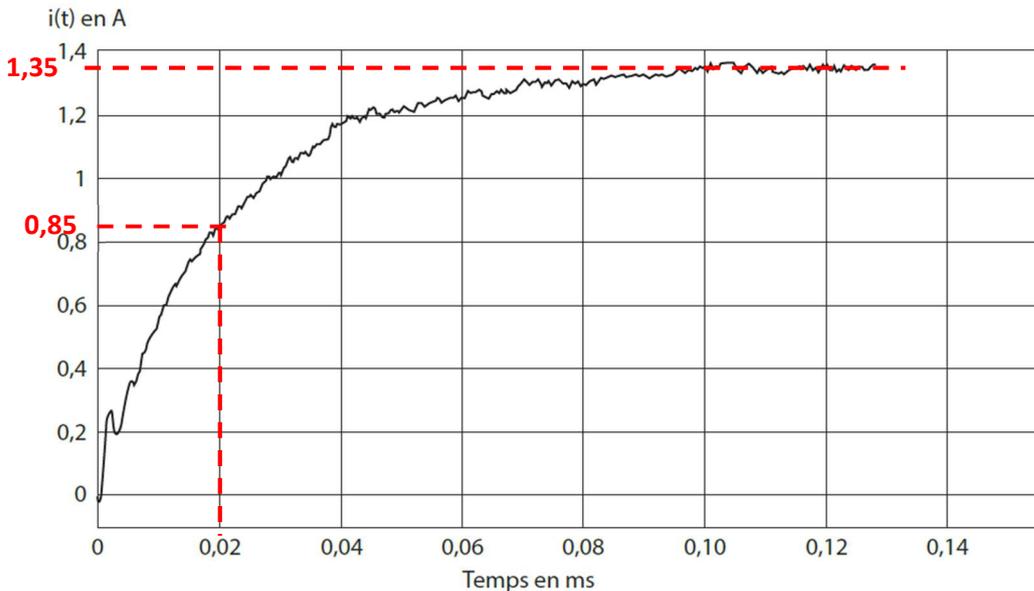
$$\tau_m = \frac{R \cdot J_m}{k_e^2} \text{ d'où } \boxed{R \cdot J_m = \tau_m k_e^2 = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{V}}$$

Q11. À partir des deux premières équations du modèle de connaissance du servomoteur, exprimer la fonction de transfert $\frac{I(p)}{U_m(p)}$ sous forme canonique lorsque le rotor du moteur est bloqué.

$$L \left[L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = u_m(t) - e(t) \right] \rightarrow LpI(p) + RI(p) = U_m(p) - E(p)$$

$$L[e(t) = k_e \cdot \omega_m(t)] \rightarrow E(p) = k_e \cdot \Omega_m(p) = 0 \text{ car on considère ici le rotor du moteur bloqué.}$$

$$\text{D'où } LpI(p) + RI(p) = U_m(p) \text{ soit } \frac{I(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{R+L \cdot p} = \frac{1/R}{1+\frac{L}{R} \cdot p}$$



Q12. Déduire de la figure 18 la valeur numérique de R et celle de L . À partir des résultats obtenus par l'exploitation de la figure 17, déduire également la valeur numérique de J_m . **Tout tracé jugé utile sera reporté sur le document réponses.**

On reconnaît la réponse temporelle d'un ordre 1. On identifie le gain statique ($\frac{1}{R}$) à l'aide de $i(+\infty) = \frac{1}{R} u_0$ et la constante de temps ($\frac{L}{R}$) à l'aide de $0,63 \cdot i(+\infty) = 0,85 \text{ A}$.

$$\text{On a donc : } \frac{1}{R} u_0 = 1,35 \text{ A soit } R = \frac{u_0}{1,35} \text{ d'où } \boxed{R = 2,2 \Omega} \text{ Or } R \cdot J_m = 2,4 \cdot 10^{-7} \rightarrow \boxed{J_m = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$\text{Et : } \frac{L}{R} = 0,02 \text{ ms soit } \boxed{L = 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ H}}$$

Q13. Afin que l'asservissement soit de qualité il est nécessaire que l'écart $\varepsilon(t)$ soit nul quand $\alpha(t) = \alpha_c(t)$ en régime permanent et pour une entrée type échelon. Déterminer la relation entre K_a et K_c permettant de garantir un asservissement de qualité.

Pour que le système soit correctement asservi, il faut $\boxed{K_a = K_c}$

Q14. Déterminer l'expression de $H(p)$, fonction de transfert de la commande des roues. Mettre $H(p)$ sous forme canonique, préciser l'ordre de $H(p)$ et l'expression de ses paramètres caractéristiques. Faire les applications numériques.

$$\text{D'après la figure 12, en appliquant le théorème de Black, il vient : } H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_c K_r K_m} p + \frac{\tau_m}{K_c K_r K_m} p^2} \text{ ordre 2}$$

Par identification : Gain statique $\boxed{K = 1}$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{K_c K_r K_m}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau_m}{K_c K_r K_m} \text{ soit } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_c K_r K_m}{\tau_m}} \text{ d'où } \xi = \frac{1}{2 \sqrt{K_c K_r K_m \tau_m}}$$

$$\text{AN : } \omega_0 = 8,64 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \xi = 1,93$$

Q15. À partir des résultats de la question précédente et en se référant au tableau 2, conclure sur les performances de précision angulaire et de stabilité du modèle théorique de la commande des roues.

Précision angulaire : le gain statique de $H(p)$ vaut 1 donc l'erreur statique (consigne échelon) sera nulle → **CDC OK**

Stabilité : $\xi > 1$ donc l'asservissement en position des roues ne présentera aucun dépassement → **CDC OK**

Q16. Conclure sur la validité du modèle théorique de la commande des roues vis-à-vis du comportement réel observable figure 19. Qu'il s'agisse du modèle théorique ou du comportement réel de la commande des roues, conclure sur la performance en rapidité.

- La courbe du modèle théorique est **quasiment confondue** avec celle du modèle expérimental **donc le modèle théorique est validé**.
- Graphiquement on mesure : $Tr_{5\%} = 1 \text{ s} > 0,4 \text{ s}$ → **CDC rapidité KO**

Q17. Après avoir donné l'expression de $H(p) = \frac{A(p)}{A_c(p)}$, déterminer l'expression de K_p pour que la commande soit la plus rapide possible sans dépassements pour une consigne de type échelon. Faire l'application numérique.

Le théorème de Black appliqué au schéma blocs de la figure 19 donne : $H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{KK_p}p + \frac{\tau}{KK_p}p^2}$

Pour que la commande soit la plus rapide possible sans dépassements pour une consigne de type échelon il faut que l'amortissement soit égal à 1.

$$\text{Ici } \omega_0 = \sqrt{\frac{KK_p}{\tau}} \text{ et } \xi = \frac{1}{2\sqrt{KK_p\tau}}$$

$$\text{Il faut donc } \frac{1}{2\sqrt{KK_p\tau}} = 1 \text{ soit } \boxed{K_p = \frac{1}{4K\tau}} \quad \text{AN : } K_p = 7,6 \text{ V}\cdot\text{rad}^{-1}$$

Q18. À partir de la figure 21, conclure sur l'effet de la correction choisie vis-à-vis des performances attendues pour la commande des roues du véhicule RC.

- On observe une erreur statique nulle, comme demandé dans le tableau 1 → **CDC précision angulaire OK** ;
- On relève $Tr_{5\%} = 0,25 \text{ s} < 0,4 \text{ s}$ comme demandé dans le tableau 1 → **CDC rapidité OK** ;
- On n'observe aucun dépassement comme demandé dans le tableau 1 → **CDC stabilité OK**.

Q19. Conclure sur la performance en précision de la commande des roues en expliquant la cause possible de la perturbation engendrant l'écart observé entre les deux courbes expérimentales de la figure 22.

La courbe $\alpha(t)$ voiture sur le sol présente une erreur statique non nulle donc la performance de précision angulaire n'est plus respectée pour le véhicule sur le sol. Cela peut s'expliquer par la **présence de frottements entre les roues et le sol**.

Q20. Après avoir donné l'expression de $H_r(p) = \frac{A(p)}{P(p)} \Big|_{A_c(p)=0}$, montrer que l'action intégrale permet d'annuler l'effet de d'une perturbation en échelon d'amplitude P_0 quel que soit K_i .

Le théorème de Black appliqué au schéma blocs de la figure 23 donne : $H_r(p) = -\frac{1}{BC(p)} \cdot \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)}$

$$\text{Soit } H_r(p) = -\frac{p}{BK_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{K_i K} p^2 + \frac{\tau}{K_i K} p^3}$$

Pour une perturbation en échelon $P(p) = \frac{P_0}{p}$, l'effet sur la position angulaire des roues en régime permanent s'exprime à l'aide du théorème de la valeur finale par $\Delta\alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H_r(p) \cdot \frac{P_0}{p}$.

$$\text{Soit } \Delta\alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{-p}{BK_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{K_i K} p^2 + \frac{\tau}{K_i K} p^3} \cdot \frac{P_0}{p} = 0$$

L'action intégrale permet donc d'annuler l'effet d'une perturbation en échelon quel que soit K_i

Q21. En absence de perturbation, donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$.

$$FTBO(p) = C(p) \cdot G(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

$$\text{Soit } \boxed{FTBO(p) = \frac{K_p K / T_i}{p^2} \cdot (1 + T_i p) \cdot \frac{1}{1 + \tau p}}$$

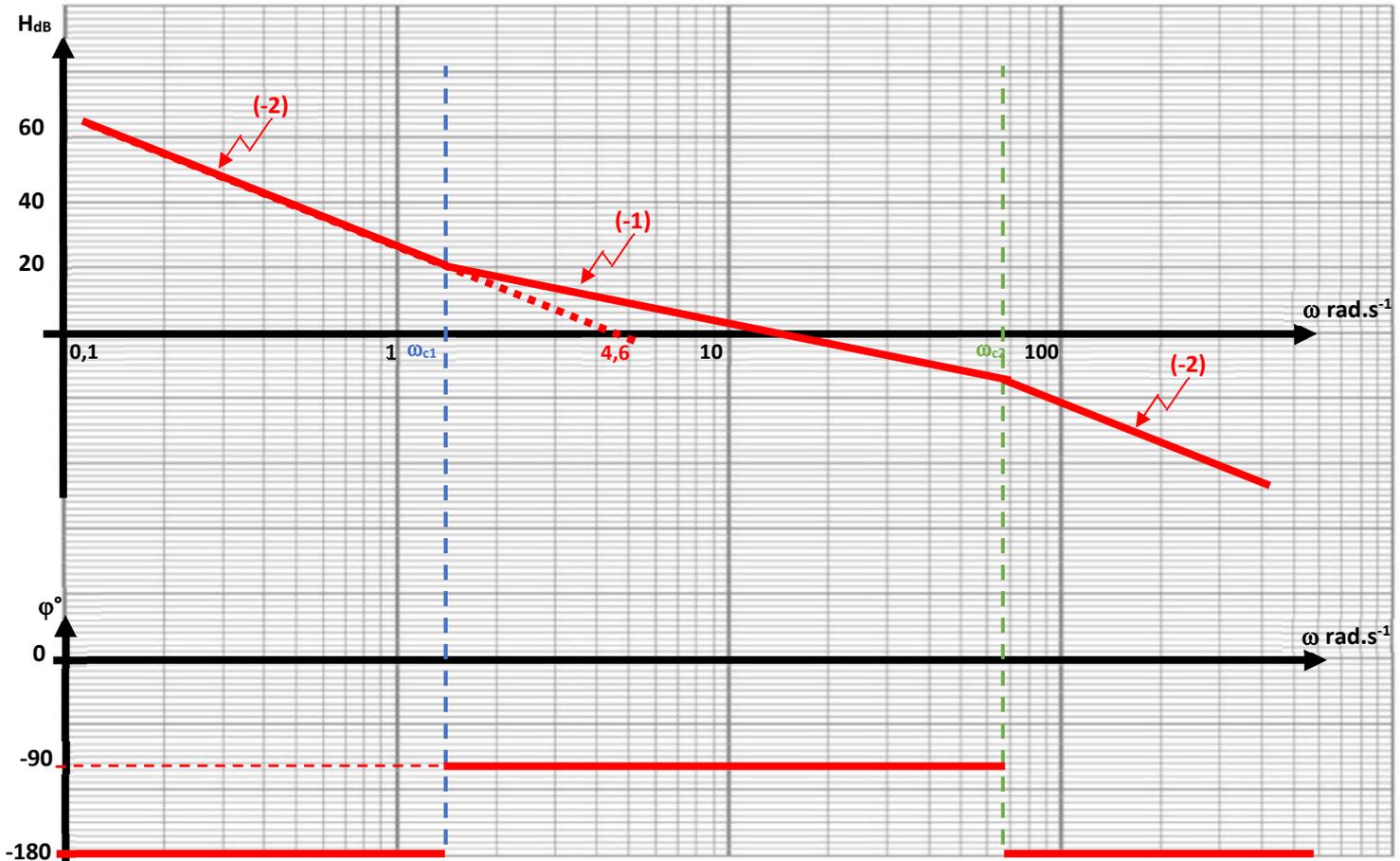
Q22. Sur le document réponses, représenter les diagrammes de Bode asymptotiques du gain (dB) et de la phase ($^{\circ}$) de la fonction de transfert en boucle ouverte.

La FTBO est le produit d'un intégrateur double, d'un inverse de 1^{er} ordre et d'un 1^{er} ordre.

Les diagrammes de Bode présenteront donc deux pulsations de cassure : $\omega_{c1} = \frac{1}{T_i} = 1,25 \text{ rad.s}^{-1}$
 et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau} = 66,7 \text{ rad.s}^{-1}$

L'intégrateur double engendrera une asymptote initiale :

- du gain de $-40 \text{ dB/dec} = (-2)$ qui coupe l'axe des pulsations à $\omega = \sqrt{\frac{K_p K}{T_i}} = 4,6 \text{ rad.s}^{-1}$
- de la phase à -180° .



Q23. Calculer la pulsation de coupure ω_{co} de la FTBO.

La résolution numérique de $20 \log |FTBO(j\omega_{co})| = 0$ permet d'établir $\omega_{co} = 16,3 \text{ rad.s}^{-1}$

Q24. Après avoir calculé $\varphi_{FTBO}(\omega_{co})$ conclure sur la stabilité de la commande en position des roues.

$\varphi_{FTBO}(\omega_{co}) = \text{Arg}[FTBO(j\omega_{co})] = -108^{\circ} > -180^{\circ} \rightarrow \text{CDC stabilité OK}$

Q25. Par le raisonnement de votre choix, justifier qu'un correcteur à action intégrale seule risque de déstabiliser la commande en position des roues. **Tout tracé jugé utile sera reporté sur le document réponses...**

Avec un correcteur à action intégrale seule, la FTBO sera de la forme : $FTBO(p) = \frac{K_i K}{p^2} \cdot \frac{1}{(1+\tau p)}$ soit le produit d'un intégrateur double ($\varphi(\omega) = \text{constante} = -180^{\circ}$) et d'un 1^{er} ordre ($\varphi(\omega) < 0^{\circ}$). Quelle que soit ω , en particulier la pulsation de coupure, la phase de la FTBO sera inférieure à -180° . D'où le risque d'instabilité.