

On a vu précédemment que l'on pouvait prévoir le comportement cinématique des systèmes. Mais cela ne suffit pas pour concevoir un système ou vérifier qu'il répond bien aux attentes du cahier des charges CDC. Il faut aussi s'intéresser aux **actions mécaniques** auxquelles ce système est soumis afin de :

- **dimensionner les pièces** qui le composent et prévoir leurs déformations,
- **déterminer les équations dynamiques du mouvement**,
- **déterminer les caractéristiques des actionneurs** permettant de le maintenir en situation d'équilibre (objectif de ce cours) ou de le mettre en mouvement (étudié en 2<sup>ème</sup> année).

Dans ce cours, on s'intéressera uniquement à la détermination des **lois de commande en effort** afin de maintenir un mécanisme en **équilibre**.



Stratosphere tower à Las Vegas

### SOMMAIRE

<b>1</b>	<b>ACTIONS MÉCANIQUES</b> .....	<b>3</b>
1.1	Définition : .....	3
1.2	Classification : .....	3
<b>2</b>	<b>MODÉLISATION D'UNE ACTION MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE : Modèle local</b> .....	<b>3</b>
2.1	Notion de force : .....	3
2.2	Notion de moment : .....	3
2.3	Notations : .....	4
<b>3</b>	<b>MODÉLISATION GLOBALE D'UNE ACTION MÉCANIQUE – TORSEUR D'EFFORT ASSOCIÉ</b> .....	<b>4</b>
3.1	Modèle global : .....	4
3.2	Exemples : .....	5
<b>4</b>	<b>ACTION MÉCANIQUE DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES</b> .....	<b>6</b>
4.1	Contact avec frottement. Lois de Coulomb : .....	6
4.1.1	1° cas : la vitesse de glissement $\vec{V}(M, 2/1) \neq \vec{0}$ : .....	6
4.1.2	2° cas : la vitesse de glissement $\vec{V}(M, 2/1) = \vec{0}$ : .....	6

4.1.3	3° cas : Équilibre strict : .....	7
4.2	Contact sans frottement : .....	7
4.3	Modèle global : .....	7
4.4	Action mécanique transmise par un contact ponctuel : .....	7
4.5	Action mécanique transmise par une petite surface : .....	7
<b>5</b>	<b><u>TORSEURS DES ACTIONS MÉCANIQUES TRANSMISSIBLES PAR LES LIAISONS NORMALISÉES (hypothèse liaisons parfaites = sans frottement)</u></b> .....	<b>8</b>
5.1	Cas particulier des mécanismes plans : .....	11
5.2	Conclusion : .....	11
<b>6</b>	<b><u>TORSEURS DES ACTIONS MÉCANIQUES USUELLES</u></b> .....	<b>12</b>
	Action de la pesanteur : .....	12
	Action d'un fluide à pression constante sur une surface : .....	12
	Action développée par un ressort de traction compression : .....	12
	Action développée par un ressort de torsion : .....	12
	Action d'entraînement d'un vérin : .....	13
	Action d'entraînement d'un moteur électrique : .....	13
<b>7</b>	<b><u>ISOLEMENT D'UN ENSEMBLE MATÉRIEL</u></b> .....	<b>14</b>
7.1	Définition d'un système isolé : .....	14
7.2	Concept d'actions mécaniques extérieures et intérieures : .....	14
<b>8</b>	<b><u>PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE</u></b> .....	<b>14</b>
8.1	Définition de l'équilibre d'un système matériel : .....	14
8.2	Énoncé du Principe Fondamental de la Statique : .....	14
8.3	Repère galiléen : .....	14
8.4	Théorèmes généraux : TRS et TMS : .....	15
8.4.1	Théorème de la résultante statique : TRS.....	15
8.4.2	Théorème du moment statique : TMS.....	15
8.5	Théorème des actions mutuelles : .....	15
8.6	Systèmes plans : .....	16
8.7	Cas particuliers : .....	16
8.7.1	Cas d'un système en équilibre sous l'action de deux actions mécaniques modélisables par deux glisseurs : .....	16
8.7.2	Cas d'un système en équilibre sous l'action de trois actions mécaniques modélisables par trois glisseurs : .....	16
<b>9</b>	<b><u>APPLIQUER LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE afin de déterminer les lois de commande en effort d'un mécanisme à l'équilibre</u></b> .....	<b>18</b>
9.1	Méthode : .....	18
9.2	Stratégie d'isolement pour une structure en chaîne ouverte : .....	19
9.3	Stratégie d'isolement pour une structure en chaîne fermée : .....	20

# 1 ACTIONS MÉCANIQUES

## 1.1 Définition :

On appelle action mécanique toute cause susceptible :

- de maintenir un solide au repos,
- de créer ou de modifier un mouvement,
- de déformer un solide.



## 1.2 Classification :

Les actions mécaniques sont de deux sortes :

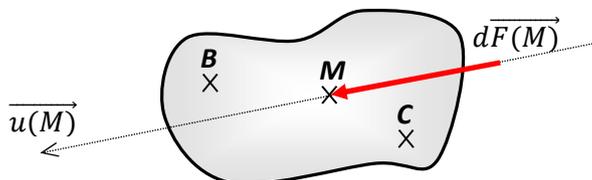
- **les actions mécaniques à distance** dites également actions mécaniques volumiques, car chaque élément de volume de l'ensemble matériel qui y est soumis, subit une action mécanique élémentaire.  
**Exemples** : les actions magnétiques et l'action de la pesanteur.
- **les actions mécaniques de contact** dites également actions mécaniques surfaciques (ou linéiques), car chaque élément de surface (ou de longueur) de l'ensemble matériel qui y est soumis, subit une action mécanique élémentaire.  
**Exemples** : les actions de pression, les actions de contact entre deux solides.

# 2 MODÉLISATION D'UNE ACTION MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE : Modèle local

## 2.1 Notion de force :

Une action mécanique élémentaire exercée par un système matériel 1 sur un élément de volume, de surface ou de longueur (centré en M) d'un système matériel 2, est définie par :

- **un vecteur**, appelé vecteur **force élémentaire** ( $\overrightarrow{dF(M)}$ ), dont l'intensité est proportionnelle à l'élément de volume, de surface ou de longueur ( $dv$ ,  $dS$  ou  $dl$ ) et est exprimée en Newton (N),
- **un point d'application M**, centre de l'élément de volume, de surface ou de longueur.



## 2.2 Notion de moment :

Le point d'application est absolument nécessaire puisqu'il permet de définir **le moment de cette action mécanique**.

En effet, le **moment élémentaire en B** est alors, par définition :  $\overrightarrow{dM_B(dF(M))} = \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{dF(M)}$ .

Ce moment est donc exprimé en Newton Mètres (Nm).

De même, le moment en C est  $\overrightarrow{dM_C(dF_M)} = \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}) \wedge \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{dM_B(dF(M))} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{dF(M)}$ .

On constate donc que les moments en B et C de cette action mécanique vérifient la relation de **Varignon**, il s'agit donc d'un **champ de moment de torseur**.

### 2.3 Notations :

D'après ce qui précède, on peut donc modéliser une action mécanique élémentaire par son torseur élémentaire :

$$\{dT_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} d\overline{F(M)} = f_{(M)} \cdot dv \cdot \overline{u(M)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}} \quad \text{pour une action mécanique élémentaire volumique}$$

où  $f_{(M)}$  est une densité volumique de force en  $\text{N.m}^{-3}$ .

$$\{dT_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} d\overline{F(M)} = f_{(M)} \cdot dS \cdot \overline{u(M)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}} \quad \text{pour une action mécanique élémentaire surfacique}$$

où  $f_{(M)}$  est une densité surfacique de force en  $\text{N.m}^{-2}$ .

#### Exemples :

- en un point M d'un solide S de masse volumique  $\rho(M)$ , soumis à l'attraction terrestre pour laquelle l'accélération de la pesanteur vaut  $g$ , l'action mécanique élémentaire sur un élément de volume  $dv$ , peut-être modélisée par :

$$\{dT_{\text{pesanteur} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} d\overline{F(M)} = \rho \cdot \vec{g} \cdot dv \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

- en un point M d'une paroi de S en contact avec un fluide où la pression est  $p(M)$ , l'action mécanique élémentaire du fluide sur un élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{n}$  peut-être modélisée par :

$$\{dT_{\text{fluide} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} d\overline{F(M)} = -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

## 3 MODÉLISATION GLOBALE D'UNE ACTION MÉCANIQUE – TORSEUR D'EFFORT ASSOCIÉ

### 3.1 Modèle global :

Lorsque nous étudions un ensemble de solides indéformables, il conviendra de modéliser l'action mécanique exercée par un ensemble matériel **1** sur un ensemble matériel **2** de manière globale.

L'ensemble matériel **2** étant constitué d'une infinité d'éléments infiniment petits caractérisés par une infinité de points M, et sur lesquels s'exercent les actions mécaniques élémentaires  $d\overline{F(M)}$  dues à **1**, le torseur des actions mécaniques exercées par **1** sur **2** exprimé en O, peut-être défini par :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R_{1 \rightarrow 2}} = \iiint_{\text{volume}} d\overline{F(M)} \\ \overline{\mathcal{M}_{O,1 \rightarrow 2}} = \iiint_{\text{volume}} \overline{OM} \wedge d\overline{F(M)} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}} \quad \left| \quad \{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R_{1 \rightarrow 2}} = \iint_{\text{zone contact}} d\overline{F(M)} \\ \overline{\mathcal{M}_{O,1 \rightarrow 2}} = \iint_{\text{zone contact}} \overline{OM} \wedge d\overline{F(M)} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

dans le cas d'actions volumiques dans le cas d'actions surfaciques

**La résultante** en Newton (**N**) modélise la part de l'action mécanique qui **génère ou modifie un mouvement de translation**, ou provoque une déformation de traction ou compression.

**Le moment** en Newton mètres (**Nm**) modélise la part de l'action mécanique qui **génère ou modifie un mouvement de rotation**, ou provoque une déformation de torsion.

### 3.2 Exemples :

#### Cas de la pesanteur :

Soit un solide (S), de volume  $V$ , constitué d'un matériau homogène de masse volumique  $\rho$  constante, placé dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$ .

#### Modèle local :

Chaque élément de volume  $dv$  construit autour d'un point courant  $M$  est soumis à la force élémentaire due à la pesanteur :

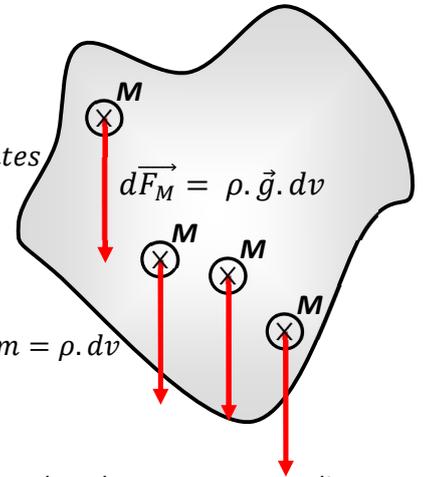
$$d\vec{F}_M = \rho \cdot \vec{g} \cdot dv.$$

#### Modèle global :

$$\vec{R}_{pesanteur \rightarrow S} = \iiint_{\text{volume}} d\vec{F}(M) = \iiint_{\text{volume}} \rho \cdot \vec{g} \cdot dv \quad \vec{g} \text{ et } \rho \text{ étant constantes}$$

$$\vec{R}_{pesanteur \rightarrow S} = \rho \cdot \vec{g} \cdot \iiint_{\text{volume}} dv = \rho \cdot V \cdot \vec{g} = M \cdot \vec{g}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O, pesanteur \rightarrow S} = \iiint_{\text{volume}} \vec{OM} \wedge \rho \cdot \vec{g} \cdot dv = \left[ \iiint_{\text{volume}} \vec{OM} \cdot dm \right] \wedge \vec{g} \quad \text{avec } dm = \rho \cdot dv$$



On remarque que la résultante et le moment en un point du torseur sont orthogonaux, donc le torseur est un glisseur et il existe un point où le moment est nul. Ce point noté  $G$  est tel que  $\iiint_{\text{volume}} \vec{GM} \cdot dm = \vec{0}$ , c'est le centre de gravité du solide.

$$\{T_{pesanteur \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} M \cdot \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

#### Cas d'un fluide exerçant une action mécanique sur une surface sans frottement visqueux :

Considérons le piston d'un vérin de surface  $S$ , constitué d'un matériau homogène, soumis à la pression de l'air  $p$  constante :

#### Modèle local :

Chaque élément de surface  $dS$  construit autour d'un point courant  $M$  est soumis à la force élémentaire due à l'air comprimé :

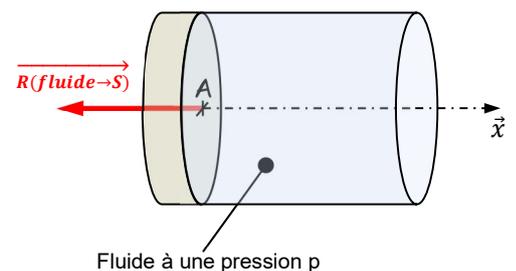
$$d\vec{F}(M) = -p \cdot dS \cdot \vec{n}.$$

#### Modèle global :

Expression de la résultante de cette action mécanique :

$$\vec{R}_{fluide \rightarrow S} = \iint_{\text{surface}} d\vec{F}(M) = \iint_{\text{surface}} -p \cdot dS \cdot \vec{n}$$

$$\vec{R}_{fluide \rightarrow S} = -p \cdot S \cdot \vec{n}$$



Expression du moment de cette action mécanique en  $A$ , centre du piston :

$$\vec{\mathcal{M}}_{A, fluide \rightarrow S} = \iint_{\text{surface}} \vec{AM} \wedge -p \cdot dS \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$\{T_{fluide \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} -pS \cdot \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

## 4 ACTION MÉCANIQUE DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES

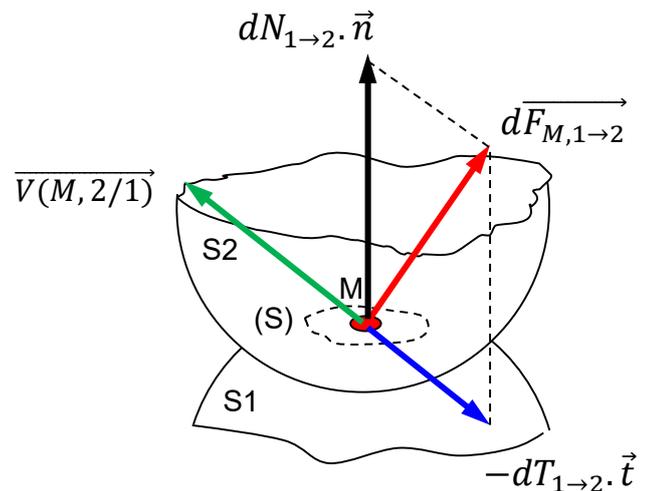
### 4.1 Contact avec frottement. Lois de Coulomb :

L'action mécanique élémentaire entre deux solides S1 et S2 en contact au point M peut se décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{1\rightarrow 2} &= dN_{1\rightarrow 2} \cdot \vec{n} - dT_{1\rightarrow 2} \cdot \vec{t} \\ dN_{1\rightarrow 2} &= p(M) \cdot dS \end{aligned}$$

Avec :

- $\vec{n}$  étant le vecteur unitaire normal au point de contact M dirigé vers S2,
- $\vec{t}$  étant un vecteur unitaire du plan tangent commun aux deux solides en contact au point M colinéaire à la vitesse de glissement  $\vec{V}(M, 2/1)$  et dirigé dans le même sens.
- $p(M)$  est la pression de contact et est exprimée en Pa.



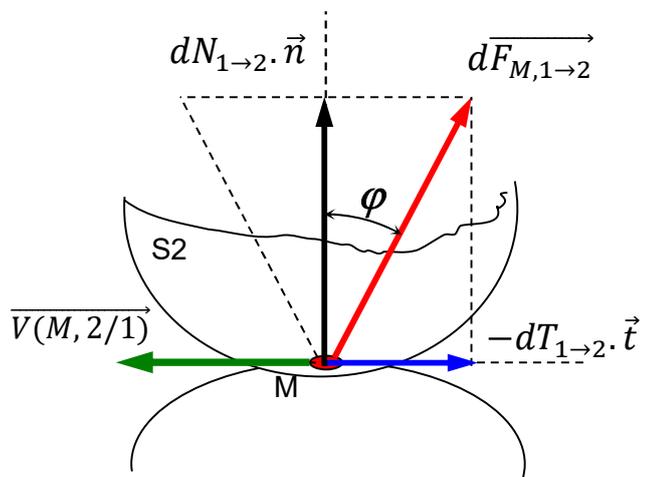
#### 4.1.1 1° cas : la vitesse de glissement $\vec{V}(M, 2/1) \neq \vec{0}$ :

$$d\vec{F}_{1\rightarrow 2} = dN_{1\rightarrow 2} \cdot \vec{n} - dT_{1\rightarrow 2} \cdot \vec{t}$$

Avec  $\frac{dT_{1\rightarrow 2}}{dN_{1\rightarrow 2}} = f$  et  $f$  représente le facteur de frottement au

contact en M : **Modèle de Coulomb.**

- On appelle angle de frottement  $\varphi$  l'angle entre la direction de la normale au contact et la direction de  $d\vec{F}_{1\rightarrow 2}$  on aura donc  $f = \tan(\varphi)$
- On appelle cône de frottement, le cône de demi-angle au sommet  $\varphi$  sur lequel se situe l'action élémentaire.



Le coefficient de frottement entre 2 solides en contact est fonction de : la nature des matériaux en contact, la lubrification, l'état de surface, la température.

Nature des matériaux en contact	f	
	à sec	lubrifié
acier sur acier	0,1	0,09
acier sur fonte	0,16	0,08 à 0,04
acier sur bronze	0,1	0,09
téflon su acier	0,04	
fonte sur bronze	0,2	0,08 à 0,04
nylon sur acier	0,35	0,12
bois sur bois	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
métal sur bois	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
métal sur glace	0,02	
pneu voiture sur route	0,6	0,3 à 0,1 (sol mouillé)

#### 4.1.2 2° cas : la vitesse de glissement $\vec{V}(M, 2/1) = \vec{0}$ :

$$d\vec{F}_{1\rightarrow 2} = dN_{1\rightarrow 2} \cdot \vec{n} - dT_{1\rightarrow 2} \cdot \vec{t}$$

Avec  $\frac{dT_{1\rightarrow 2}}{dN_{1\rightarrow 2}} < f$  : l'action mécanique élémentaire  $d\vec{F}_{M,1\rightarrow 2}$  est alors **dans le cône de frottement.**

#### 4.1.3 3° cas : Équilibre strict :

**La limite du glissement** ou **équilibre strict**, est caractérisée par un déplacement relatif des deux pièces à vitesse quasi-nulle, permettant de concilier deux hypothèses contradictoires lors d'une étude des efforts en statique :

- les solides sont en équilibre relatif, imposant une vitesse de glissement nulle.
- la direction de l'action de contact n'est connue que dans le cas où le mouvement relatif existe :

**le modèle de Coulomb est adopté à la limite du glissement.**

#### 4.2 Contact sans frottement :

Lorsqu'il n'y a pas de frottement ou d'adhérence, le facteur  $f$  est nul et donc l'action mécanique élémentaire n'est portée que par la normale et :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = dN_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}$$

#### 4.3 Modèle global :

À partir de l'expression de l'action mécanique élémentaire de S1 sur S2, on peut exprimer le torseur de cette action en un point A de la zone de contact par le modèle global :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} \vec{AM} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_R \quad \text{en exprimant } d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \text{ selon la présence ou non de frottement.}$$

#### 4.4 Action mécanique transmise par un contact ponctuel :

Nous allons supposer que la surface de contact est réduite à un point.

Ce cas correspond à une modélisation d'un contact ponctuel avec frottement. On note A le point de contact. L'action mécanique de 1 sur 2 est modélisée en A par un torseur de type glisseur :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{array} \right\}_R = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n} - T_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{t} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_R$$

Le moment en A de cette action mécanique est nul car la surface de contact entre S1 et S2 est réduite au point A.

#### 4.5 Action mécanique transmise par une petite surface :

Nous allons maintenant supposer que la surface de contact est de petite dimension, mais non réduite à un point. Ce cas correspond à un contact « ponctuel » réel.

L'action mécanique de 1 sur 2 est modélisée en A, centre de la surface de contact entre 1 et 2, par le torseur suivant :

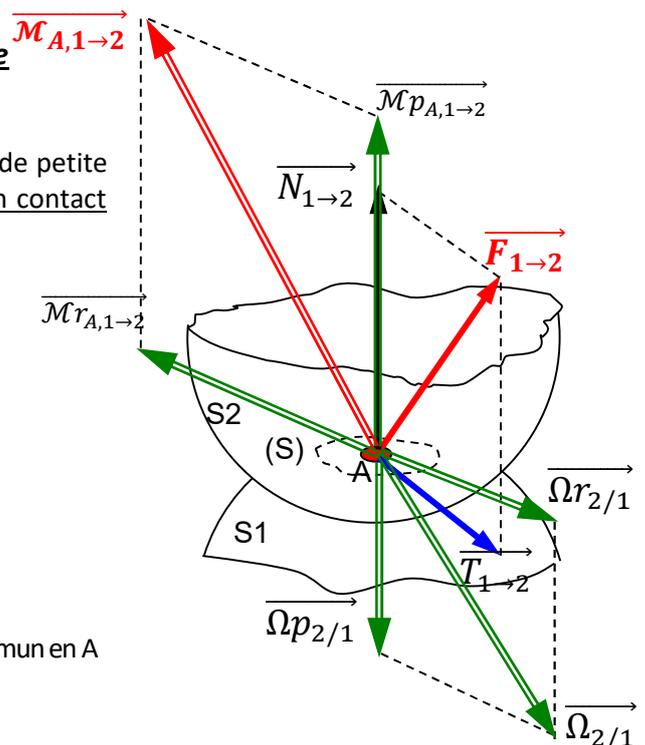
$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} = \vec{\mathcal{M}}p_{A,1 \rightarrow 2} + \vec{\mathcal{M}}r_{A,1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_R$$

où  $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  est l'effort normal et  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  l'effort tangentiel,

$\vec{\mathcal{M}}p_{A,1 \rightarrow 2}$  est le moment de pivotement et

$\vec{\mathcal{M}}r_{A,1 \rightarrow 2}$  le moment de roulement.

Ces composantes sont obtenues par projection dans le plan tangent commun en A à 1 et 2, et sur sa normale.



En considérant le vecteur rotation du mouvement relatif  $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$  et ses composantes obtenues par projection :  $\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \overrightarrow{\Omega}_{p_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega}_{r_{2/1}}$ , on introduit des lois caractérisant les composantes du moment analogues à celles des lois de Coulomb.

➤ Concernant le moment de pivotement :  $\overrightarrow{\mathcal{M}p}_{A,1\rightarrow 2}$

- Cas 1 : la vitesse de rotation de pivotement est non nulle :  $\overrightarrow{\Omega}_{p_{2/1}} \neq \vec{0}$   
 $\overrightarrow{\mathcal{M}p}_{A,1\rightarrow 2}$  est alors opposé au vecteur rotation de pivotement  $\overrightarrow{\Omega}_{p_{2/1}}$ .  
 $\|\overrightarrow{\mathcal{M}p}_{A,1\rightarrow 2}\| = \delta \|\overrightarrow{N}_{1\rightarrow 2}\|$  où  $\delta$  est le paramètre de résistance au pivotement (exprimé en m).
- Cas 2 : la vitesse de rotation de pivotement est nulle :  $\overrightarrow{\Omega}_{p_{2/1}} = \vec{0}$   
 $\|\overrightarrow{\mathcal{M}p}_{A,1\rightarrow 2}\| < \delta \|\overrightarrow{N}_{1\rightarrow 2}\|$

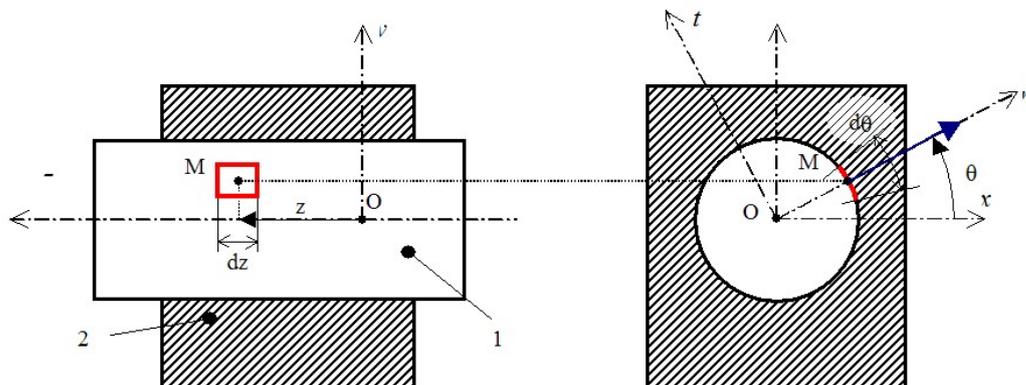
➤ Concernant le moment de roulement :  $\overrightarrow{\mathcal{M}r}_{A,1\rightarrow 2}$

- Cas 1 : la vitesse de rotation de roulement est non nulle :  $\overrightarrow{\Omega}_{r_{2/1}} \neq \vec{0}$   
 $\overrightarrow{\mathcal{M}r}_{A,1\rightarrow 2}$  est alors opposé au vecteur rotation de roulement  $\overrightarrow{\Omega}_{r_{2/1}}$   
 $\|\overrightarrow{\mathcal{M}r}_{A,1\rightarrow 2}\| = \eta \|\overrightarrow{N}_{1\rightarrow 2}\|$  où  $\eta$  est le paramètre de résistance au roulement (exprimé en m).
- Cas 2 : la vitesse de rotation de roulement est nulle :  $\overrightarrow{\Omega}_{r_{2/1}} = \vec{0}$   
 $\|\overrightarrow{\mathcal{M}r}_{A,1\rightarrow 2}\| < \eta \|\overrightarrow{N}_{1\rightarrow 2}\|$

## 5 TORSEURS DES ACTIONS MÉCANIQUES TRANSMISSIBLES PAR LES LIAISONS NORMALISÉES (hypothèse liaisons parfaites = sans frottement)

**Objectif** : déterminer la modélisation globale des actions mécaniques transmissibles par les liaisons normalisées (parfaites).

**Exemple** : Liaison pivot glissant d'axe  $(O; \vec{z})$ .



**Modèle local** :

Le point courant M est défini par :  $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{n} + z \cdot \vec{z}$  en coordonnées cylindriques. L'action mécanique élémentaire au point M est modélisée par un glisseur tel que :

$$\{dT_{1\rightarrow 2}\}_M = \left\{ \begin{array}{l} d\overrightarrow{F}_{1\rightarrow 2} = f_{(M)} \cdot dS \cdot \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_R$$

la force élémentaire est dirigée suivant la normale car il n'y a pas de frottement.

La répartition de pression de contact  $f_{(M)}$  est inconnue et  $dS = r \cdot d\theta \cdot dz$ .

**Modèle global :**

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O,1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

Nous allons étudier les éléments de réduction, sans chercher à les calculer (car la répartition de pression de contact est inconnue), mais en déterminant les composantes non nulles dans le repère local associé à la liaison.

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} f_{(M)} \cdot r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{n} = \iint_{\text{zone contact}} f_{(M)} \cdot r \cdot (\cos\theta \cdot \vec{x} + \sin\theta \cdot \vec{y}) \cdot d\theta \cdot dz$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} f_{(M)} \cdot r \cdot \cos\theta \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{x} + \iint_{\text{zone contact}} f_{(M)} \cdot r \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{y} = X_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{zone contact}} (r \cdot \vec{n} + z \cdot \vec{z}) \wedge f_{(M)} \cdot dS \cdot \vec{n} = \iint_{\text{zone contact}} f_{(M)} \cdot r \cdot z \cdot \vec{t} \cdot d\theta \cdot dz$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,1 \rightarrow 2} = L_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + M_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}$$

On en déduit la forme du torseur de l'action mécanique transmissible par une liaison pivot glissant parfaite d'axe  $(O, \vec{z})$  :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_O = \begin{pmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & L_{1 \rightarrow 2} \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

En utilisant la même méthode, nous pouvons déterminer la forme des torseurs des actions mécaniques transmissibles pour l'ensemble des liaisons normalisées.

**On constate, et ceci se généralise pour toutes les liaisons normalisées, que :**

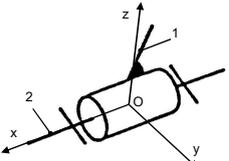
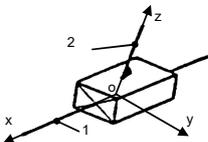
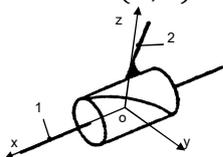
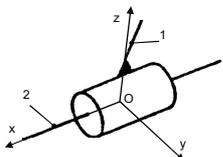
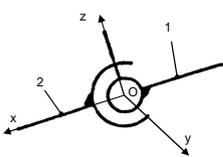
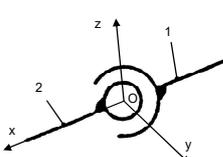
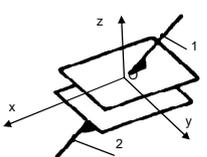
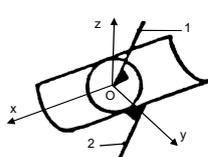
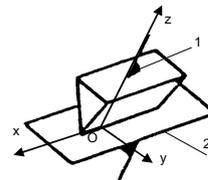
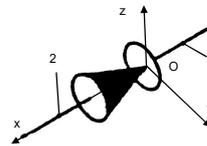
- à une mobilité en rotation correspond une composante nulle du moment transmissible,
- à une mobilité en translation correspond une composante nulle de la résultante transmissible.

**Actions mécaniques réciproques :**

On admettra sans démonstration (elle sera effectuée au paragraphe 8.5.) :

**Théorème des action réciproques :**  $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = -\{T_{2 \rightarrow 1}\}$

Soit  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$  et  $\vec{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} = -\vec{\mathcal{M}}_{A,2 \rightarrow 1}$  quel que soit A

Nom de la liaison	Torseur d'action mécanique transmissible
Liaison pivot d'axe $(O; \vec{x})$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison glissière de direction $\vec{x}$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{1 \rightarrow 2} \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison hélicoïdale d'axe $(O; \vec{x})$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & L_{1 \rightarrow 2} \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ <p>avec <math>X_{1 \rightarrow 2} = -\frac{2\pi}{p} * L_{1 \rightarrow 2}</math></p>
Liaison pivot glissant d'axe $(O; \vec{x})$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison sphérique à doigts de centre O. 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & L_{1 \rightarrow 2} \\ Y_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison rotule de centre O. 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison appui plan de normale $\vec{z}$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{1 \rightarrow 2} \\ 0 & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison linéaire annulaire d'axe $(O; \vec{x})$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison linéaire rectiligne d'axe $(O; \vec{x})$ et de normale $\vec{z}$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison ponctuelle de normale $\vec{x}$ . 	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

### 5.1 Cas particulier des mécanismes plans :

Une **modélisation plane** peut-être retenue lorsque l'on considère que le mécanisme possède un plan de symétrie vis-à-vis des actions mécaniques.

Il sera de la responsabilité de l'ingénieur de formuler cette hypothèse simplificatrice qui peut-être éloignée de la réalité.

Soit un ensemble matériel ayant le plan **(P)** pour plan de symétrie (vis-à-vis des actions mécaniques). Le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est associé au plan **(P)** et  $\vec{z}$  lui est normal.

À toute action mécanique élémentaire  $d\vec{F}(M) = df_x \cdot \vec{x} + df_y \cdot \vec{y} + df_z \cdot \vec{z}$  appliqué en un point  $M(x, y, z)$  correspond une autre action mécanique élémentaire  $d\vec{F}(M') = df_x \cdot \vec{x} + df_y \cdot \vec{y} - df_z \cdot \vec{z}$  appliqué en un point  $M(x, y, -z)$ .

Déterminons le torseur associé à ces deux actions mécaniques élémentaires :

**La résultante :**

$$\vec{R} = d\vec{F}(M) + d\vec{F}(M') = 2 \cdot (df_x \cdot \vec{x} + df_y \cdot \vec{y})$$

**Le moment en O :**

$$\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge d\vec{F}(M) + \vec{OM}' \wedge d\vec{F}(M') = 2 \cdot (x \cdot df_y - y \cdot df_x) \cdot \vec{z} \Rightarrow \vec{M}_O = N \cdot \vec{z}$$

### 5.2 Conclusion :

En associant ainsi deux à deux les actions mécaniques appliquées à l'ensemble pour définir le torseur lié au modèle global d'action mécanique, on peut conclure qu'une modélisation plane entraîne une simplification des torseurs des actions mécaniques en imposant des zéros ou des valeurs ignorées.

On remarque notamment que **la résultante  $\vec{R}$  appartient au plan de symétrie (P)**, alors que **le moment  $\vec{M}_O$  lui est orthogonal**.

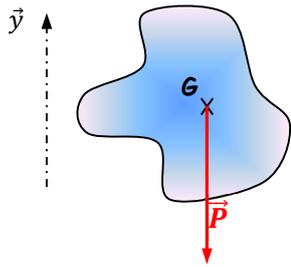
**Exemple :**

Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  :

Dans l'espace	Hypothèse problème plan $(\vec{x}, \vec{y})$	Hypothèse problème plan $(\vec{y}, \vec{z})$
$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & - \\ Y_{1 \rightarrow 2} & - \\ - & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & - \\ Z_{1 \rightarrow 2} & - \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

## 6 TORSEURS DES ACTIONS MÉCANIQUES USUELLES

### Action de la pesanteur :

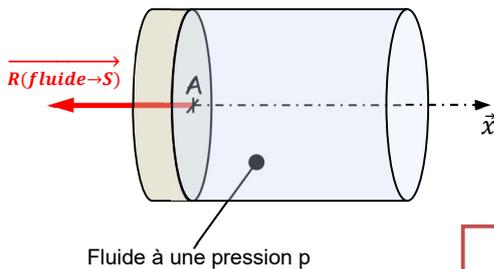


$$\{T_{\text{pesanteur} \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$m$  : masse de (S) en kg  
 $g$  : accélération gravitationnelle  
 $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

*Le poids d'un solide est une force appliquée en G (centre de gravité), verticale et dirigée vers le bas.*

### Action d'un fluide à pression constante sur une surface :

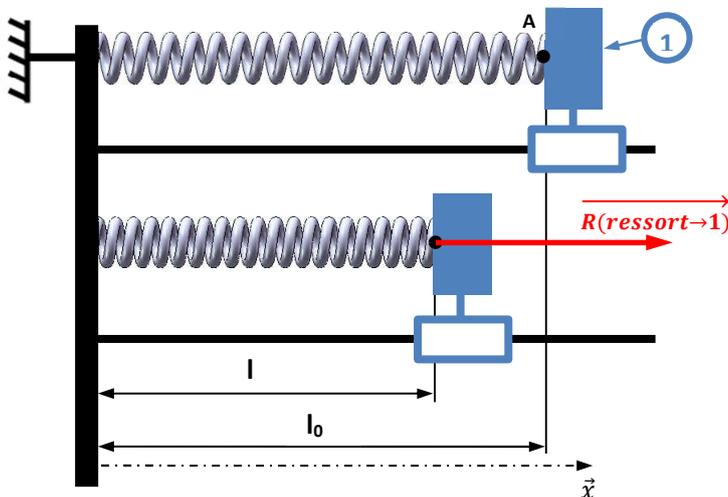


$$\{T_{\text{fluide} \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} -pS & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$p$  : pression du fluide en MPa  
 $S$  : aire de la surface projetée en  $\text{mm}^2$

*L'action d'un fluide sur une surface est une force appliquée en A (centre de la surface), perpendiculaire à la surface et dirigée vers l'intérieur de la surface.*

### Action développée par un ressort de traction compression :



$$\{T_{\text{ressort} \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} -k \cdot (l - l_0) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$k$  : raideur du ressort en  $\text{N.mm}^{-1}$   
 $l$  : longueur du ressort comprimé en mm  
 $l_0$  : longueur libre du ressort en mm

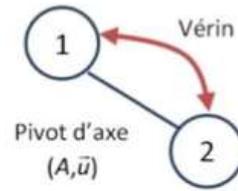
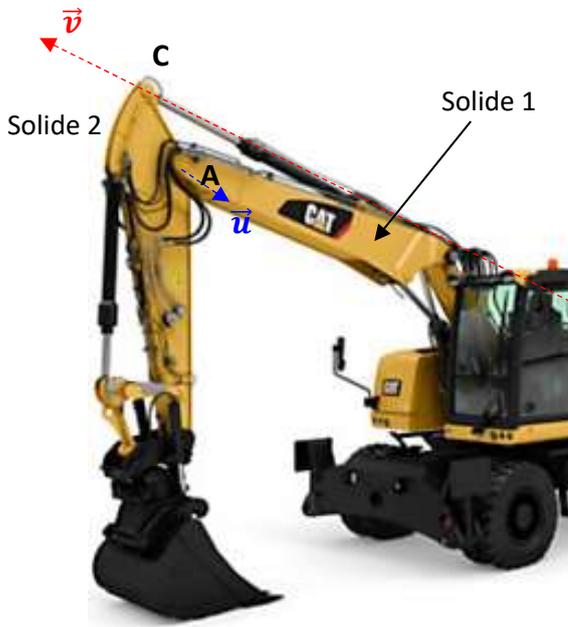
### Action développée par un ressort de torsion :



$$\{T_{\text{ressort} \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -k \cdot (\alpha - \alpha_0) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

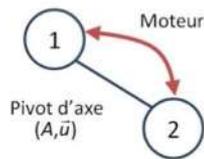
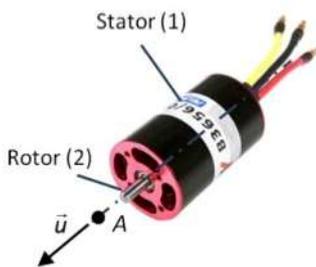
$k$  : raideur du ressort en  $\text{Nm.rad}^{-1}$   
 $(\alpha - \alpha_0)$  : variation angulaire du ressort en radians

**Action d'entraînement d'un vérin :**



$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \forall P \in (C, \vec{v}) \left\{ \begin{array}{l} F_{12} \cdot \vec{v} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_R$$

**Action d'entraînement d'un moteur électrique :**



$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \forall P \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_{12} \cdot \vec{u} \end{array} \right\}_R$$

## 7 ISOLEMENT D'UN ENSEMBLE MATÉRIEL

### 7.1 Définition d'un système isolé :

Isoler tout ou partie d'un système, revient à le rendre distinct de son environnement. On coupe alors l'espace en deux parties disjointes :

- la zone étudiée (notée  $E$ )
  - l'environnement (noté  $\bar{E}$ )
- } La limite entre ces deux zones est appelée **frontière d'isolement**.

On peut isoler :

- une quantité de fluide (mécanique des fluides)
- un ensemble de pièces appartenant à un mécanisme. (statique ou dynamique)
- une pièce (statique ou dynamique)

### 7.2 Concept d'actions mécaniques extérieures et intérieures :

Les actions mécaniques appliquées par des éléments de l'environnement  $\bar{E}$  sur le système isolé sont appelées **actions mécaniques extérieures**.

Les actions mécaniques que s'exercent mutuellement entre les différentes parties du même système isolé sont appelées **actions mécaniques intérieures**.

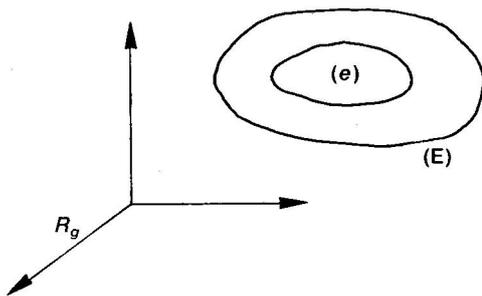
## 8 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

### 8.1 Définition de l'équilibre d'un système matériel :

Un système matériel ( $e$ ) est dit en équilibre par rapport à un repère  $Rg$ , si à un instant donné tous ses éléments sont immobiles par rapport à  $Rg$  :

( $e$ ) en équilibre  $\Leftrightarrow \forall M \in (e) \quad \overrightarrow{V(M, e/Rg)} = \vec{0}$

### 8.2 Énoncé du Principe Fondamental de la Statique :



Il existe au moins un repère, appelé repère galiléen, tel que pour tout sous-ensemble matériel ( $e$ ) de l'ensemble matériel ( $E$ ) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à ( $e$ ) soit nul.

Notons  $Rg$  le repère galiléen et  $(\bar{e})$  l'extérieur de ( $e$ ), si ( $e$ ) est en équilibre par rapport à  $Rg$  alors :

$$\sum \{T_{\bar{e} \rightarrow e}\} = \{0\} \quad \forall (e) \subset (E)$$

### 8.3 Repère galiléen :

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la terre constitue une bonne approximation d'un repère galiléen.

Un repère galiléen est donc un repère dans lequel on peut vérifier le principe fondamental de la statique avec une bonne précision.

## 8.4 Théorèmes généraux : TRS et TMS :

### 8.4.1 Théorème de la résultante statique : TRS

Pour tout sous-ensemble matériel ( $e$ ) de l'ensemble matériel ( $E$ ) en équilibre par rapport au repère galiléen  $Rg$ , la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à ( $e$ ) est nulle.

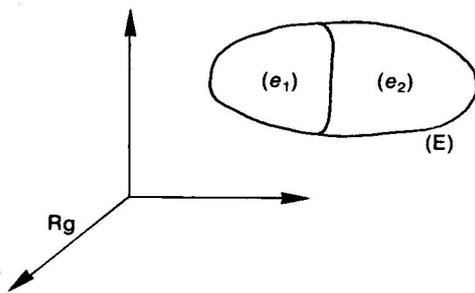
$$\sum \overrightarrow{R_{e \rightarrow e}} = \vec{0}$$

### 8.4.2 Théorème du moment statique : TMS

Pour tout sous-ensemble matériel ( $e$ ) de l'ensemble matériel ( $E$ ) en équilibre par rapport au repère galiléen  $Rg$ , le moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à ( $e$ ) est nul en tout point.

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{A, \bar{e} \rightarrow e}} = \vec{0} \quad \forall A \text{ un point de l'espace.}$$

## 8.5 Théorème des actions mutuelles :



Soit ( $E$ ) un ensemble matériel en équilibre par rapport un repère galiléen  $Rg$ . Soit une partition de ( $E$ ) en deux sous-ensembles matériels ( $e_1$ ) et ( $e_2$ ).

Appliquons le principe fondamental de la statique à ( $e_1$ ) :

$$\begin{aligned} \{T_{\bar{e}_1 \rightarrow e_1}\} &= \{0\} \\ \text{or } \bar{e}_1 &= \{\bar{E}, e_2\} \\ \text{donc } \{T_{\bar{E} \rightarrow e_1}\} + \{T_{e_2 \rightarrow e_1}\} &= \{0\} \quad (1) \end{aligned}$$

de même si on applique le principe fondamental de la statique à ( $e_2$ ) on a :

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow e_2}\} + \{T_{e_1 \rightarrow e_2}\} = \{0\} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \text{ donne : } \{T_{\bar{E} \rightarrow e_1}\} + \{T_{\bar{E} \rightarrow e_2}\} + \{T_{e_2 \rightarrow e_1}\} + \{T_{e_1 \rightarrow e_2}\} = \{0\}$$

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\} + \{T_{e_2 \rightarrow e_1}\} + \{T_{e_1 \rightarrow e_2}\} = \{0\}$$

on applique le principe fondamental de la statique à ( $E$ ) on obtient :

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\} = \{0\}$$

$$\text{donc : } \{T_{e_2 \rightarrow e_1}\} + \{T_{e_1 \rightarrow e_2}\} = \{0\}$$

finalement :

$$\{T_{e_2 \rightarrow e_1}\} = -\{T_{e_1 \rightarrow e_2}\}$$

**Théorème :** L'action mécanique du sous-ensemble ( $e_2$ ) sur le sous ensemble matériel ( $e_1$ ) est opposée à l'action mécanique de ( $e_1$ ) sur ( $e_2$ ).

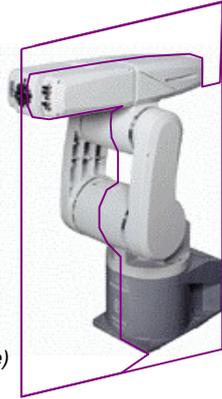
## 8.6 Systèmes plans :

Certains cas fréquents concernent les systèmes en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques dont les résultantes sont coplanaires et les moments éventuels perpendiculaires à ce plan. Ces systèmes sont qualifiés de **systèmes plans**.

### Le modèle plan est possible

Plan d'étude

(Robot de surveillance)



### Le modèle plan est impossible

(Robot de manipulation de couvercles)



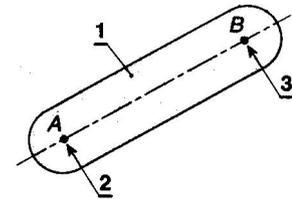
## 8.7 Cas particuliers :

### 8.7.1 Cas d'un système en équilibre sous l'action de deux actions mécaniques modélisables par deux glisseurs :

**Hypothèses :** Le système matériel {1} est en équilibre sous l'action de deux glisseurs.

Bilan des actions mécanique extérieures sur {1} :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \{T_{2 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \\ \bullet \quad \{T_{3 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \end{Bmatrix}_A \end{aligned}$$



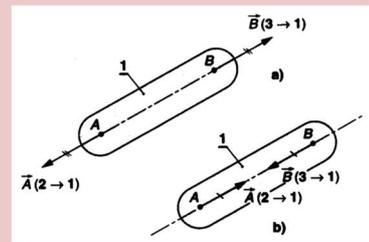
On applique le PFS :

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \end{cases}$$

Or  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0}$  implique que  $(AB)$  est l'axe central de  $\{T_{3 \rightarrow 1}\}$  ( $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} = (AB)$ ). De même on montre que  $(AB)$  est l'axe central de  $\{T_{2 \rightarrow 1}\}$ .

**Conclusion :** Lorsqu'un ensemble matériel est en équilibre sous l'action de deux actions mécaniques modélisables par deux glisseurs alors:

- les résultantes sont opposées : même direction, même norme, sens contraire
- les droites d'action sont identiques et passent par les 2 points d'application.

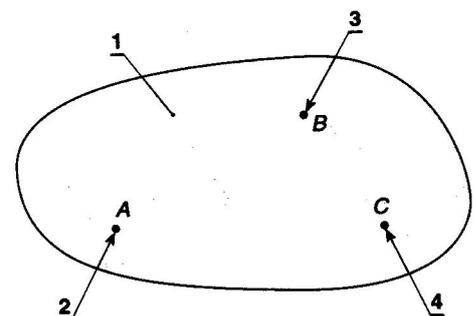


### 8.7.2 Cas d'un système en équilibre sous l'action de trois actions mécaniques modélisables par trois glisseurs :

**Hypothèses :** Le système matériel {1} est en équilibre sous l'action de trois actions mécaniques modélisables par trois glisseurs.

Bilan des actions mécanique extérieures sur {1} :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \{T_{2 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \\ \bullet \quad \{T_{3 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \end{Bmatrix}_A \end{aligned}$$



$$\bullet \quad \{T_{4 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} \end{Bmatrix}_A$$

On applique le PFS :

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} = -\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  ces deux vecteurs sont directement opposés et perpendiculaires à un même plan, il s'ensuit que A, B, C,  $\overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  appartiennent à un même plan que nous notons ( $\Pi$ ).

Trois cas peuvent alors se produire :

- $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  se coupent en un point  $P \in (\Pi)$ .
- $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  sont parallèles.
- $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  sont identiques.

Examinons séparément ces trois cas :

**cas 1 :**  $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  se coupent en un point  $P \in (\Pi)$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \{T_{2 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \end{Bmatrix}_P \\ \bullet \quad \{T_{3 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \\ \bullet \quad \{T_{4 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \end{aligned}$$

Le PFS nous donne alors  $\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} = \vec{0} \Rightarrow P \in \Delta \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}}$

**cas 2 :**  $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  sont parallèles.

On doit avoir  $\overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} = \vec{0}$  donc  $\Delta \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}}$ ,  $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  sont parallèles.

**cas 3 :**  $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  sont confondus (BC).

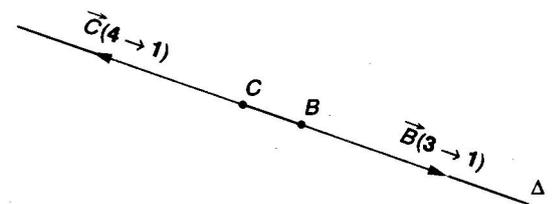
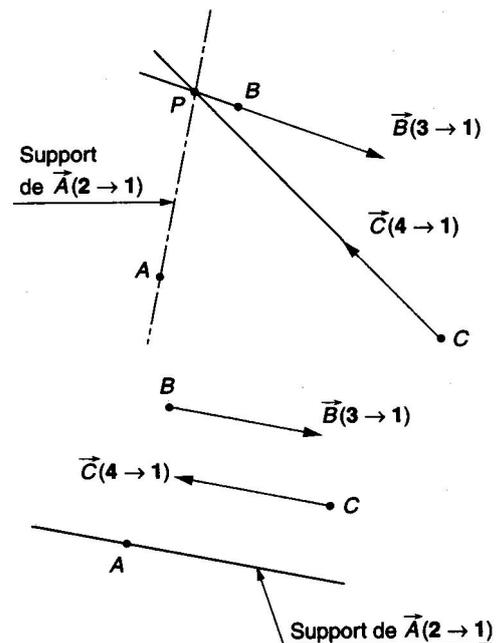
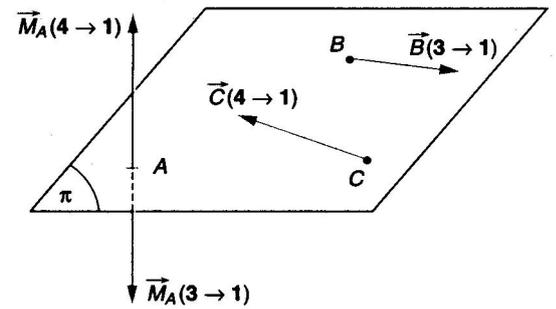
$$\begin{aligned} \bullet \quad \{T_{2 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \end{Bmatrix}_B \\ \bullet \quad \{T_{3 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \\ \bullet \quad \{T_{4 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \end{aligned}$$

Le PFS nous donne alors  $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} = \vec{0} \Rightarrow \Delta \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} = (BA)$

Le PFS nous donne aussi  $\overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}} = \vec{0}$  donc  $\Delta \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}}$ ,  $\Delta \overrightarrow{B_{3 \rightarrow 1}}$  et  $\Delta \overrightarrow{C_{4 \rightarrow 1}}$  sont parallèles.

Donc  $A \in (BC)$ .

Donc les axes centraux de  $\{T_{2 \rightarrow 1}\}$ ,  $\{T_{3 \rightarrow 1}\}$  et  $\{T_{4 \rightarrow 1}\}$  sont confondus.



**Conclusion :** Lorsqu'un ensemble matériel est en équilibre sous l'action de trois actions mécaniques modélisables par des glisseurs alors les axes centraux de ceux-ci sont :

- soit coplanaires et concourants en un même point ;
- soit coplanaires et parallèles ;
- soit confondus.

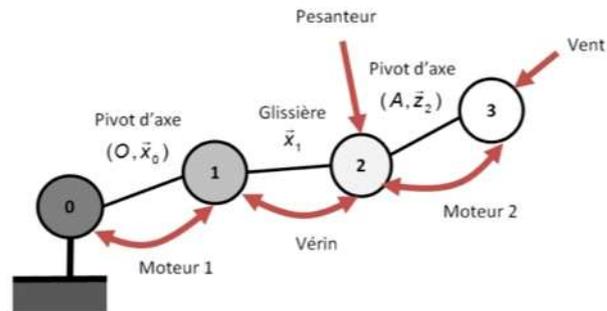
## 9 APPLIQUER LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE afin de déterminer les lois de commande en effort d'un mécanisme à l'équilibre

### 9.1 Méthode :

#### ➤ Dessiner le graphe d'analyse du mécanisme étudié

Un graphe d'analyse est un graphe des liaisons complété des actions mécaniques sollicitant le mécanisme étudié. Il permet de recenser efficacement les actions mécaniques extérieures à un ensemble isolé.

**Exemple :** chaîne ouverte à 3 degrés de liberté.



#### ➤ Identifier les actions mécaniques connues et celles recherchées.

➤ Analyser les hypothèses proposées : liaisons parfaites, problème plan, prise en compte du frottement,...

➤ Élaborer une stratégie d'isolement afin de déterminer la ou les actions mécaniques recherchées qui garantissent l'équilibre du mécanisme.

La stratégie d'isolement diffère selon que l'étude porte sur une chaîne ouverte ou une chaîne fermée (voir paragraphes 9.2 et 9.3).

#### ➤ Appliquer le PFS, successivement, pour chaque isolement :

- Écrire les torseurs des actions mécaniques extérieures en tenant compte éventuellement de l'hypothèse de problème plan,
- Utiliser sans démonstration les résultats concernant les solides soumis à deux glisseurs OU appliquer le théorème de la résultante ou du moment statique selon les cas (voir méthodes 9.2 et 9.3),
- Exprimer, à l'aide de l'équation obtenue, l'action mécanique recherchée en fonction des actions mécaniques connues.

## 9.2 Stratégie d'isolement pour une structure en chaîne ouverte :

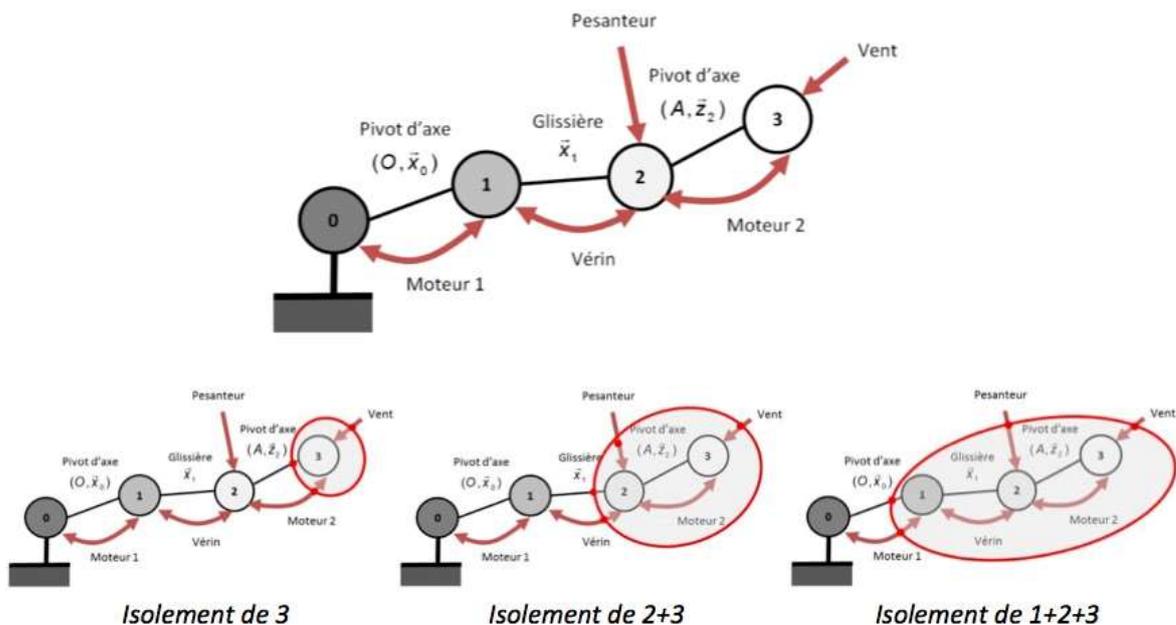
Pour qu'une structure en **chaîne ouverte** soit contrôlée en position, vitesse et effort, **un actionneur est généralement placé en parallèle de chaque liaison**. Il y a alors autant de chaînes d'énergie que de degrés de liberté dans les liaisons du mécanisme.

Pour déterminer les actions fournies aux effecteurs de chaque chaîne d'énergie afin de la maintenir en équilibre dans une position imposée, il faut :

À partir du graphe d'analyse et du schéma cinématique :

- Isoler l'extrémité de la chaîne ouverte en conservant l'actionneur à dimensionner comme action **extérieure**.  
Cela revient à choisir une **frontière d'isolement qui coupe la liaison en parallèle de l'actionneur à dimensionner** mais aucune autre liaison,
- Si le degré de liberté de la **liaison en parallèle** de l'actionneur à dimensionner est :
  - Une **translation** : on appliquera le théorème de la **résultante statique** en projection sur la **direction de la translation**,
  - Une **rotation** : appliquer le théorème du **moment statique**, en un **point de l'axe de rotation**, en projection sur la **direction de l'axe**.

Exemple de de stratégie d'isolement : chaîne ouverte à 3 degrés de liberté



Pour déterminer l'AM associée à l'actionneur	Isolement	Théorème	Projection	Résultat
Moteur 2	3	Théorème du moment statique en A	Sur $\vec{z}_2$	$\vec{M}_{A,2 \rightarrow \text{moteur2} \rightarrow 3} = f(\vec{R}_{\text{vent} \rightarrow 3})$
Vérin	2+3	Théorème de la résultante statique	Sur $\vec{x}_1$	$\vec{R}_{1 \rightarrow \text{vérin} \rightarrow 2} = f(\vec{R}_{\text{vent} \rightarrow 3}, \vec{R}_{\text{pes} \rightarrow 2})$
Moteur 1	1+2+3	Théorème du moment statique en O	Sur $\vec{x}_0$	$\vec{M}_{A,0 \rightarrow \text{moteur1} \rightarrow 1} = f(\vec{R}_{\text{vent} \rightarrow 3}, \vec{R}_{\text{pes} \rightarrow 2})$

### 9.3 Stratégie d'isolement pour une structure en chaîne fermée :

Pour qu'une structure en **chaîne fermée** soit contrôlée en position, vitesse et effort, **un seul actionneur est généralement suffisant**. Il y a alors une seule chaîne d'énergie.

Pour déterminer l'action fournie à l'effecteur de cette chaîne d'énergie afin de la maintenir en équilibre dans une position imposée, il faut :

À partir du graphe d'analyse et du schéma cinématique :

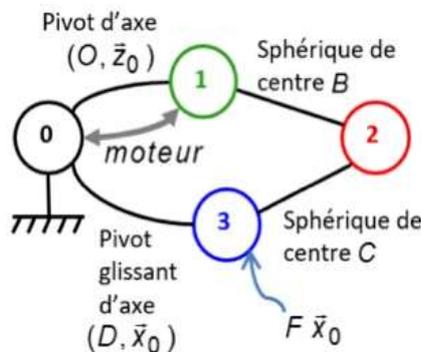
- **Identifier les solides** ou ensembles de solides **soumis à 2 glisseurs** et utiliser, sans démonstration, les résultats du cours afin de déterminer les **directions des résultantes** de ces glisseurs et ainsi réduire le nombre d'inconnues d'actions mécaniques de liaison. **Représenter** ces **résultantes** sur le **schéma cinématique**,
- Isoler, solide après solide, en partant d'un isolement qui fait intervenir les actions mécaniques connues jusqu'à un isolement qui fait intervenir l'action mécanique recherchée.

Pour les solides soumis à 2 glisseurs, utiliser, sans démonstration, les résultats du cours.

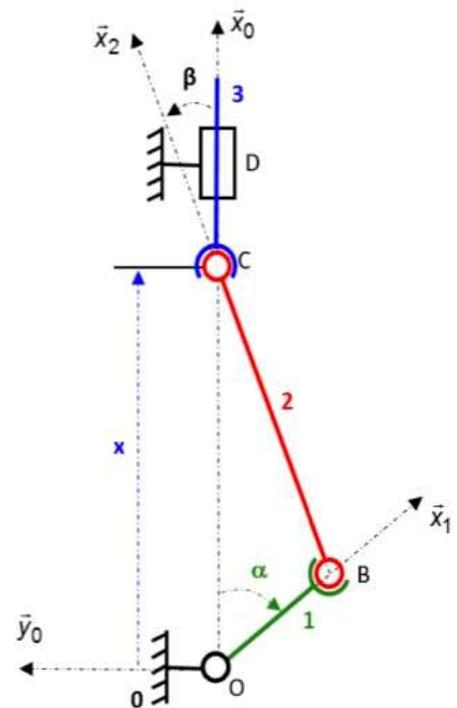
Pour les autres isolements, si le degré de liberté de la **liaison à supprimer** est :

- Une **translation** : on appliquera le théorème de la **résultante statique** en **projection sur la direction de la translation**,
- Une **rotation** : appliquer le théorème du **moment statique**, en un **point de l'axe de rotation**, en **projection sur la direction de l'axe**.

Exemple : micromoteur d'aéromodélisme



Si l'objectif est de déterminer une relation entre l'effort  $F$  sur le piston 3 et le couple  $C_{01}$  du moteur entre 0 et 1, la stratégie d'isolement est la suivante :



Étape	Isolement	Théorème	Projection	Résultat
1	2	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs		$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{R}_{3 \rightarrow 2}$ suivant $(B, \vec{x}_2)$
2	3	Théorème de la résultante statique	Sur $\vec{x}_0$	$\vec{R}_{2 \rightarrow 3} = f(F)$
3	2	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs		$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{R}_{3 \rightarrow 2}$
4	1	Théorème du moment statique en O	Sur $\vec{z}_0$	$\vec{M}_{O,0 \xrightarrow{\text{moteur}} 1} = f(\vec{R}_{2 \rightarrow 1})$

