

# Durée de l'épreuve : 2h45

## Aucun document autorisé - Calculatrice autorisée

*Cet énoncé comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.*

*Les réponses se feront exclusivement sur le document réponses – Aucun autre document ne sera corrigé.  
La notation tiendra compte de la justesse des résultats ainsi que de la rédaction et du soin apporté à la composition.*

### Stabilisateur gyroscopique pour bateau

## 1. Présentation

### 1.1. Mouvement de roulis

Le système étudié est un dispositif de stabilisation gyroscopique pour bateau permettant de neutraliser le mouvement de roulis (voir **Figure 1**). Cette rotation suivant l'axe longitudinal du navire est la première cause du mal de mer. Dans tout le sujet, seul ce mouvement de roulis, rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ , sera considéré. Si l'idée d'utiliser un gyroscope pour stabiliser un bateau remonte à plus d'un siècle, sa mise en œuvre n'est que très récente notamment grâce à la société Seakeeper. Les principaux verrous technologiques étaient la capacité à mettre et maintenir en rotation un volant d'inertie à des vitesses très élevées ainsi qu'à développer des moyens de contrôle actif afin de s'adapter à toutes les conditions de houle. La demande concerne en particulier la navigation de plaisance avec une exigence de performance forte lors de la phase de fonctionnement bateau à l'arrêt, ancre descendue.

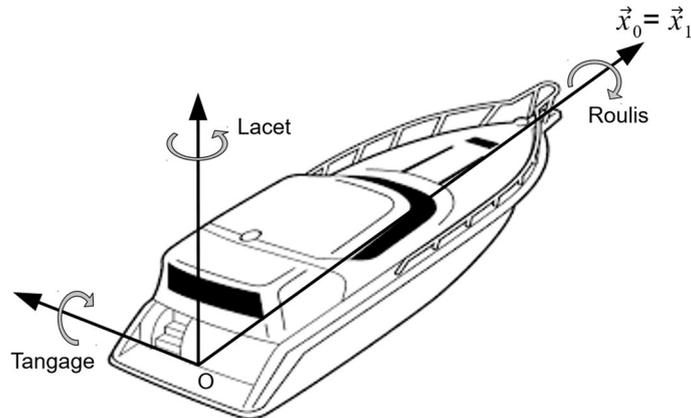


Figure 1 : Définition des 3 rotations orientant le bateau par rapport au référentiel terrestre

### 1.2. Le stabilisateur gyroscopique

Les stabilisateurs gyroscopiques peuvent être adaptés à tous les types d'embarcation grâce à un encombrement réduit et une masse limitée par rapport aux caractéristiques des navires. Le maintien de leur efficacité est assuré pour une grande variété de positionnement sur le bateau. Ainsi, leur installation peut être envisagée directement lors de la construction du navire aussi bien que par une intégration en cours de cycle de vie de l'embarcation. La **Figure 2** représente l'installation d'un stabilisateur dans le plan de symétrie du bateau  $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ , configuration retenue par la suite de l'étude.

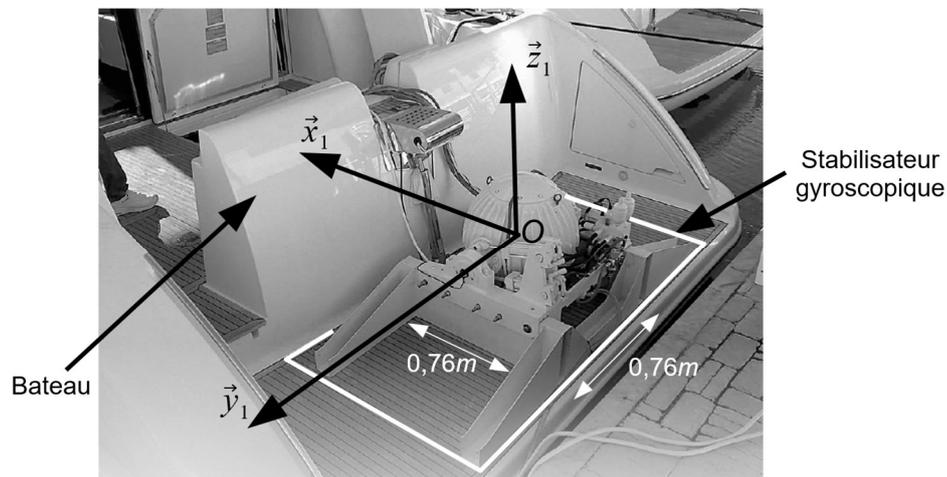


Figure 2 : Stabilisateur gyroscopique monté sur un bateau

Le stabilisateur (voir **Figure 3**) est constitué d'une enceinte **2** en liaison pivot selon l'axe de Cardan  $(O, \vec{y}_1)$  par rapport au bateau **1**. Un volant d'inertie **3**, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_2)$  par rapport à l'enceinte **2**, est maintenu en rotation grâce à un moteur électrique.

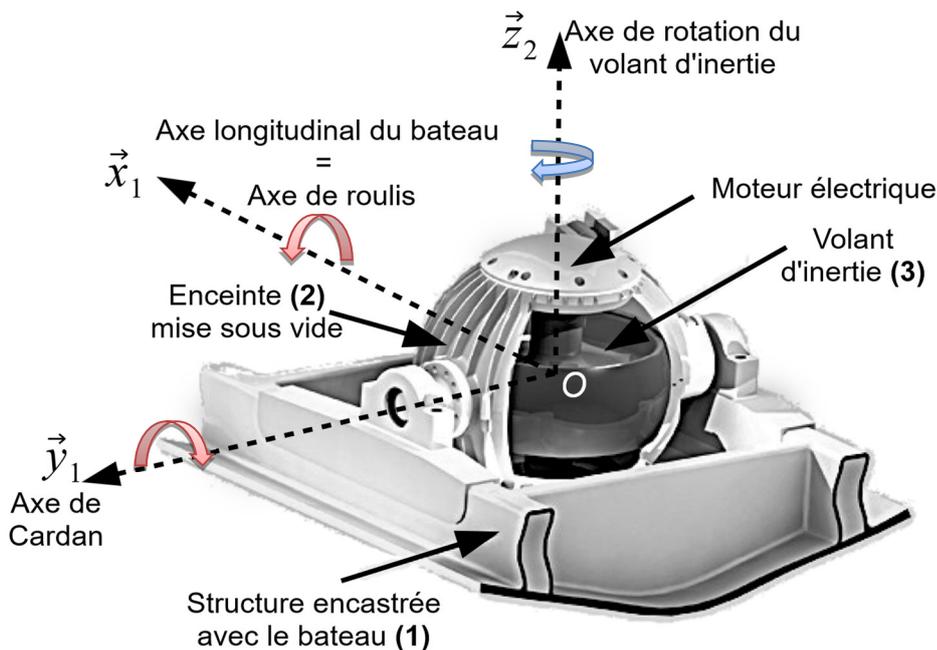


Figure 3 : Structure interne du stabilisateur gyroscopique

Les vitesses angulaires très élevées (de l'ordre de  $10000 \text{ tr. min}^{-1}$  au maximum) du volant nécessitent :

- la mise sous vide de l'enceinte **2** afin de limiter les actions mécaniques aérodynamiques qui s'exercent sur le volant d'inertie **3** lors de son mouvement de rotation et ainsi minimiser la consommation électrique ;
- le développement d'une motorisation spécifique avec entraînement direct ;
- un guidage de haute précision (de l'ordre du micromètre) réalisé par des roulements à billes en céramique.

Si la compréhension de la dynamique du stabilisateur nécessite la mise en équation du système, le découpage séquentiel du fonctionnement peut être décrit de la manière suivante :

- l'initiation d'un mouvement de roulis du bateau **1** engendre un basculement de l'ensemble {enceinte **2**, volant d'inertie **3**} autour de l'axe de Cardan (effet gyroscopique) ;
- la combinaison de la rotation du volant et de celle de l'axe de Cardan génère alors un couple gyroscopique suivant la direction de roulis ;
- ce couple tend à s'opposer au mouvement du bateau **1** et ainsi à lui assurer une stabilisation suivant la direction de roulis ;
- il apparaît ainsi que les mouvements de roulis et de tangage sont couplés. En contrôlant le mouvement de rotation de l'axe de Cardan de façon active par un système hydraulique, les performances de stabilisation de roulis sont optimisées.

Le diagramme des exigences techniques du système Seakeeper est donné sur la **Figure 4**.

**L'objectif des activités proposées dans ce sujet est d'analyser les solutions techniques qui rendent efficace le stabilisateur gyroscopique et notamment quantifier l'atténuation de l'amplitude des oscillations du bateau en roulis comme indiqué sur la Figure 5.**

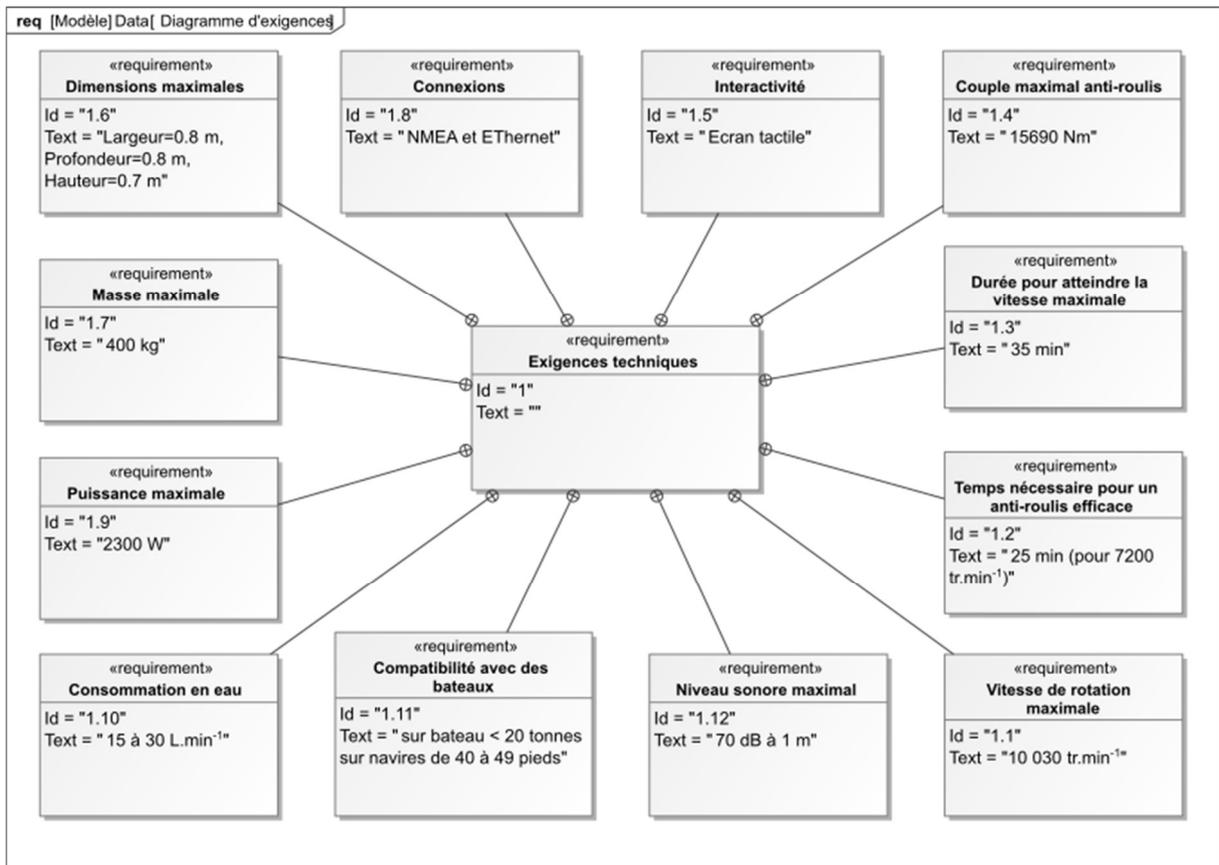


Figure 4 : Diagramme des exigences

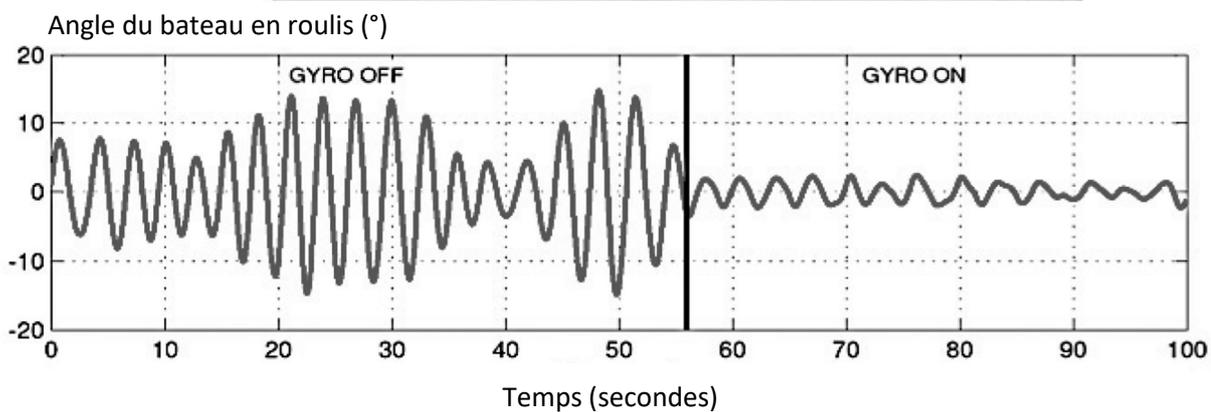


Figure 5 : Mesure des oscillations du bateau en roulis sans, puis avec, stabilisateur gyroscopique

## 2. Modélisation du système de contrôle

La compréhension de l'architecture du stabilisateur gyroscopique et sa mise en équation permet dans cette partie d'aboutir à un modèle de la chaîne d'énergie.

### 2.1. Architecture du système

La figure de ci-dessous présente l'architecture du stabilisateur gyroscopique :

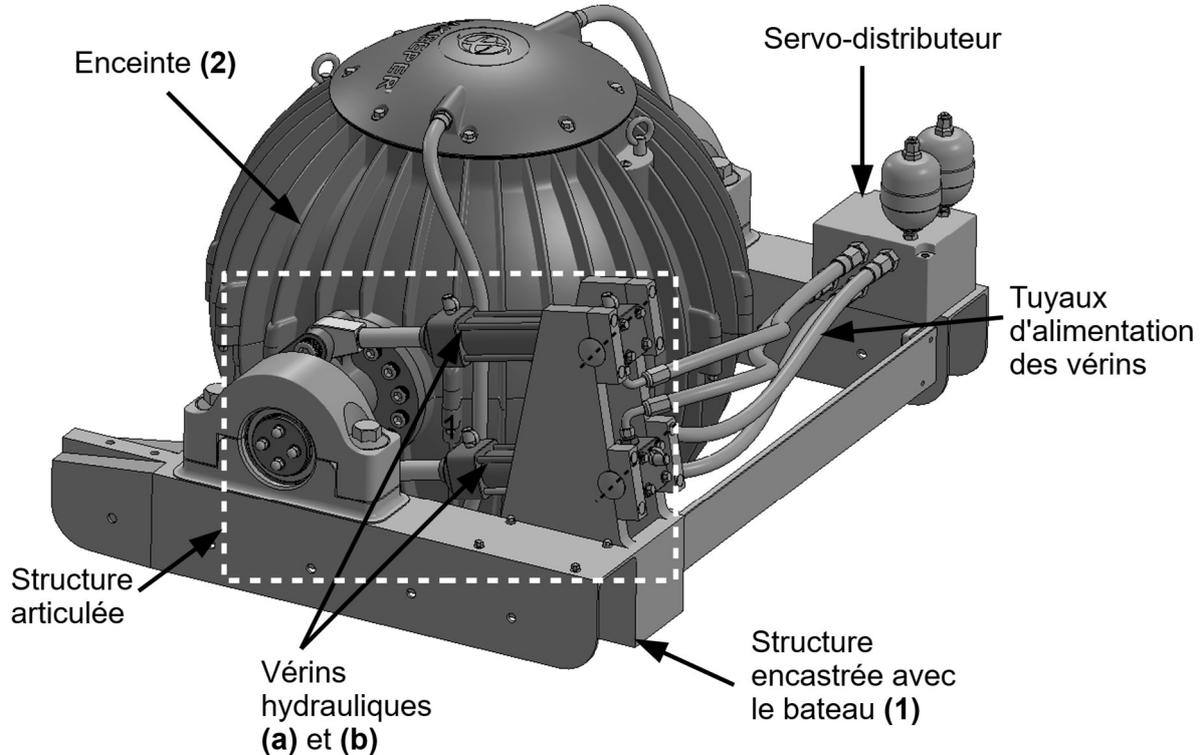


Figure 6 : Architecture du stabilisateur gyroscopique

L'inclinaison du stabilisateur gyroscopique est commandée par un contrôleur électronique et un dispositif hydraulique de manière à optimiser le couple fourni pour diminuer le roulis du bateau.

Ce dispositif hydraulique est constitué d'un servo-distributeur commandé par le contrôleur électronique. Le servo-distributeur module le débit d'alimentation en huile des deux vérins. La translation des vérins est transformée par la structure articulée en une rotation de l'ensemble enceinte 2 et volant d'inertie 3 autour de l'axe de Cardan. Un couple gyroscopique est alors généré sur l'axe de roulis du bateau afin de le stabiliser.

**Q1.** A l'aide du texte descriptif, compléter le schéma de la chaîne d'énergie du régulateur hydraulique sur le document réponses.

On réalise un asservissement en mesurant l'angle de roulis  $\alpha(t)$  du bateau à l'aide d'une centrale inertielle. L'écart  $\varepsilon(t)$  entre la consigne d'angle  $\alpha_c(t)$  et la mesure de l'angle  $\alpha(t)$  est traité par le contrôleur électronique qui délivre le courant de commande  $i(t)$  au servo-distributeur.

**Q2.** A l'aide du texte descriptif, compléter le tableau du document réponses associé aux constituants du schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement en position du bateau.

## 2.2. Modélisation des différents constituants

Pour compléter le modèle de la chaîne d'action globale, il est nécessaire de déterminer les équations qui caractérisent ce dispositif hydraulique. On utilise pour cela le modèle cinématique plan dont une épure paramétrée est proposée dans le document réponses.

On associe :

- le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  au carter du système lié au bateau **1** ;
- le repère  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié à l'enceinte **2**. L'enceinte **2** est en liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \vec{y}_1)$  avec **1**. On note  $\beta(t) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  l'angle de l'enceinte **2** par rapport à **1** selon  $\vec{y}_1$  ;
- le repère  $R_{3a}(B, \vec{x}_{3a}, \vec{y}_1, \vec{z}_{3a})$  au corps du vérin **a**. Le corps du vérin **a** est en liaison pivot parfaite d'axe  $(B, \vec{y}_1)$  avec **1**. On note  $\gamma_a(t) = (\vec{z}_1, \vec{z}_{3a}) = (\vec{x}_1, \vec{x}_{3a})$  ;
- le repère  $R_{4a}(A, \vec{x}_{4a}, \vec{y}_1, \vec{z}_{4a})$  à la tige du vérin **a**. La tige du vérin **a** est en liaison pivot parfaite d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec l'enceinte **2** ;
- le repère  $R_{3b}(D, \vec{x}_{3b}, \vec{y}_1, \vec{z}_{3b})$  au corps du vérin **b**. Le corps du vérin **b** est en liaison pivot parfaite d'axe  $(D, \vec{y}_1)$  avec **1**. On note  $\gamma_b(t) = (\vec{z}_1, \vec{z}_{3b}) = (\vec{x}_1, \vec{x}_{3b})$  ;
- et le repère  $R_{4b}(C, \vec{x}_{3b}, \vec{y}_1, \vec{z}_{3b})$  à la tige du vérin **b**. La tige du vérin **b** est en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{y}_1)$  avec l'enceinte **2**.

Les liaisons entre le corps et la tige de chaque vérin sont à définir.

On donne :

$$\begin{aligned} \vec{OA} = \vec{CO} = e \vec{z}_2 \quad \vec{BA} = \lambda_a(t) \vec{x}_{3a} \quad \vec{DC} = \lambda_b(t) \vec{x}_{3b} \\ \vec{OB} = -L\vec{x}_1 + d\vec{z}_1 \quad \text{et} \quad \vec{OD} = -L\vec{x}_1 - d\vec{z}_1. \end{aligned}$$

**Q3.** En justifiant le modèle de liaison retenu pour la liaison entre le corps et la tige de chaque vérin, compléter le graphe de liaisons du document réponses.

**Q4.** En vous aidant de la figure de la **Figure 6** et des schémas, compléter ce schéma cinématique plan dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ .

**Q5.** Poser les figures géométrales représentant les paramètres cinématiques  $\beta(t)$ ,  $\gamma_a(t)$ ,  $\gamma_b(t)$ ,  $\lambda_a(t)$  et  $\lambda_b(t)$ .

**Q6.** À l'aide d'une fermeture géométrique adéquate, déterminer une équation donnant l'évolution de  $\lambda_a$  en fonction de  $\beta$  et une autre équation reliant l'angle  $\gamma_a$  en fonction  $\beta$ .

**Q7.** Exprimer la course du vérin **a** en fonction de  $e$ ,  $d$  et  $L$ .

À partir des résultats de la question précédente, l'évolution de l'angle  $\gamma_a$  en fonction de  $\beta$  est tracée.

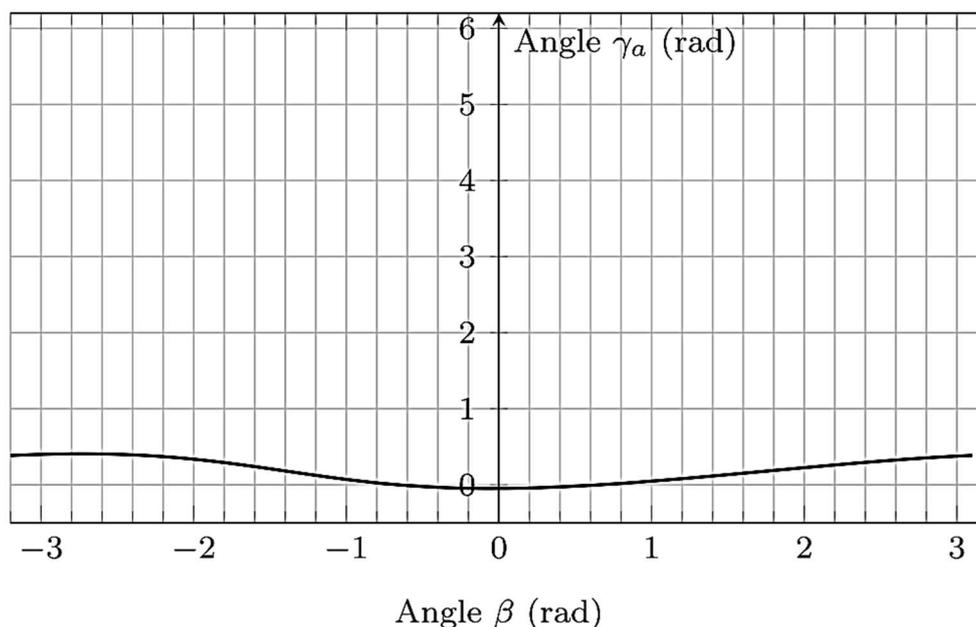


Figure 7 : Evolution de l'angle  $\gamma_a$  en fonction de  $\beta$

**Q8.** À partir de la courbe **Figure 7**, formuler une hypothèse sur les angles  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  sachant que l'angle  $\beta$  varie entre  $-45^\circ$  et  $+45^\circ$ .

On donne  $L = 60\text{cm}$  et  $e = d = 22,5\text{cm}$

**Q9.** Représenter le vérin **a** dans ses deux positions extrêmes ( $\beta = \pm 45^\circ$ ) sur le document réponses à l'échelle 1/3.

*NB : représenter les angles  $\beta$  et  $\gamma_a$ , le vecteur  $\vec{x}_{3a}$  et  $\lambda_a$  pour les 2 positions extrêmes.*

Après avoir calculé numériquement la course exprimée en Q8., comparer la valeur théorique et la valeur obtenue graphiquement. Commenter les éventuels écarts.

On adopte les notations suivantes  $\Omega_\alpha(p)$  et  $\Omega_\beta(p)$  transformées de Laplace respectives des vitesses angulaires :  $\omega_\alpha(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$  et  $\omega_\beta(t) = \frac{d\beta(t)}{dt}$ .

En utilisant les équations simplifiées obtenues par l'étude géométrique et le principe de conservation de la masse pour un fluide compressible, on peut établir l'équation suivante reliant le débit volumique total  $q(t)$ , la vitesse angulaire  $\omega_\beta(t)$  et le couple  $C_h(t)$  qu'exercent les vérins a et b sur l'enceinte 2 :

$$q(t) = S \cdot e \frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{V_0}{2.B.S.e} \frac{dC_h(t)}{dt} \quad (\text{eq 1})$$

où  $S$  représente la section utile équivalente, aux 2 vérins identiques **a** et **b**, sur laquelle s'exercent les actions mécaniques de pression du fluide,  $V_0$  est le demi volume équivalent aux 2 vérins et  $B$  le coefficient de compressibilité isotherme de l'huile.

Le servo-distributeur fournit un débit  $q(t)$  proportionnel au courant  $i(t)$  tel que  $q(t) = K_{sv} i(t)$ .

Les équations qui caractérisent le bateau et le stabilisateur gyroscopique sont les suivantes :

$$I_g \frac{d^2\beta(t)}{dt^2} = C_h(t) + C_3\omega_m \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (\text{eq 2})$$

$$I_b \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + f_b \frac{d\alpha(t)}{dt} + k_b\alpha(t) = C_{mer}(t) - C_3\omega_m \frac{d\beta(t)}{dt} \quad (\text{eq 3})$$

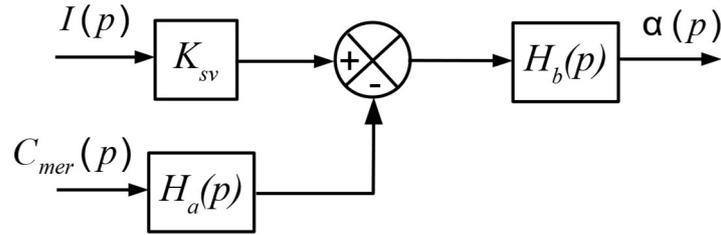
- $C_{mer}(t)$  représente le couple induit par les vagues entretenant le mouvement de roulis ;
- $-f_b \frac{d\alpha(t)}{dt}$  caractérise le moment des actions mécaniques dissipatives liées au mouvement relatif entre l'eau et la coque ( $f_b$  : coefficient de frottement visqueux) ;
- $-k_b\alpha(t)$  caractérise le moment de redressement lié à l'action combinée de la pesanteur et de la pression de l'eau sur la coque (poussée d'Archimède) ;
- $\omega_m$  représente la vitesse de rotation constante du volant 3 par rapport à l'enceinte 2 ;
- le terme  $C_3\omega_m \frac{d\beta(t)}{dt}$  provient du couplage gyroscopique et sera détaillé dans la suite ;
- $I_b$  caractérise la géométrie du bateau ;
- $I_b$  et  $C_3$  caractérisent la géométrie du gyroscope.

Toutes les constantes des équations (1), (2) et (3) sont réelles positives.

**Q10.** À l'aide des équations (**eq 1**, **eq 2**, **eq 3**) et en supposant les conditions initiales nulles, donner les fonctions de transfert  $H_1$  à  $H_6$  du schéma-blocs du document-réponse.

**Q11.** Montrer que ce schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante où l'on précisera l'expression de  $H_a$  et  $H_b$  en fonction de  $H_1$  à  $H_6$  uniquement. *(Ne surtout pas remplacer par les expressions trouvées à la question précédente).*

**NB :** Montrer à l'aide de schémas les manipulations de blocs effectuées.



### 3. Performances du système de contrôle

Dans cette partie, un modèle complet de l'asservissement en roulis du bateau est construit afin d'en étudier les performances. Le choix des correcteurs et l'optimisation de leurs paramètres de réglage vis-à-vis des performances attendues permettent de conclure sur les capacités de stabilisation du dispositif.

L'asservissement de position peut être représenté par le schéma-blocs à retour unitaire suivant :

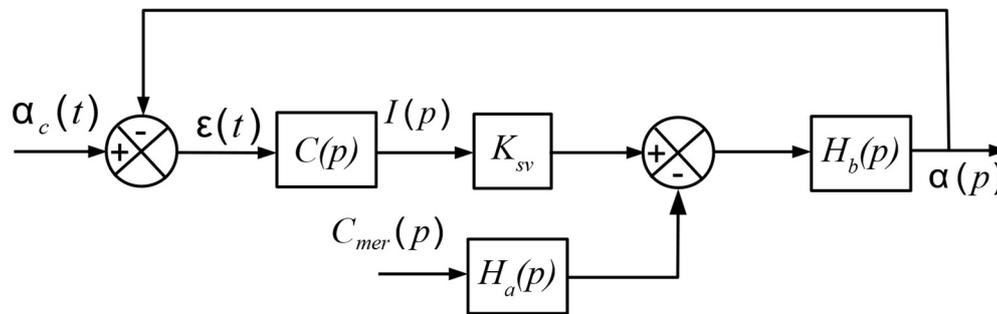


Figure 8 : Schéma-blocs de l'asservissement en roulis du bateau

Les performances attendues de l'asservissement sont les suivantes :

Performances	Critères
Précision	Erreur statique (régime stationnaire) $\leq 5\%$ pour une consigne $\alpha_c$ en échelon
Rapidité	Temps de réponse à 5% $< 5$ s
Stabilité	Premier dépassement $D_1$ (%) $< 20\%$
Atténuation du roulis	Facteur d'atténuation $> 75\%$

La fonction de transfert  $H_a(p)$  s'écrit sous la forme  $H_a(p) = K_a \left( 1 + \frac{p^2}{\omega_2^2} \right)$ .

La fonction de transfert  $H_b(p)$  s'écrit sous la forme  $H_b(p) = \frac{K_b}{1+p+0,5p^2}$

Dans un premier temps, un correcteur proportionnel  $C(p) = K_p$  est envisagé.

#### 3.1. Performances en poursuite

**Q12.** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en poursuite  $H_p(p) = \left. \frac{\alpha(p)}{\alpha_c(p)} \right|_{C_{mer}(p)=0}$  de l'asservissement en roulis du bateau en fonction de  $K_p, K_{sv}$  et  $K_b$ .

**Q13.** Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un système du deuxième ordre :

$H_p(p) = \frac{K_1}{1+2\xi\frac{p}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$  où  $K_1, \xi$  et  $\omega_0$  sont des constantes à exprimer en fonction de  $K_p, K_{sv}$  et  $K_b$ .

**Q14.** Déterminer l'expression de l'erreur statique associée à une consigne  $\alpha_c(t)$  en échelon d'amplitude  $\alpha_{c0}$  (avec  $C_{mer} = 0$ ) en fonction de  $\alpha_{c0}$ ,  $K_p$ ,  $K_{sv}$  et  $K_b$ .

On donne  $K_{sv} \cdot K_b = 2 \text{ rad} \cdot \text{A}^{-1}$ .

**Q15.** En déduire la valeur minimale de  $K_p$  assurant le critère de précision.

Les abaques d'identification d'un système du second ordre sont fournis sur le document réponses :

- Le premier montre l'évolution du temps de réponse réduit (c'est-à-dire  $T_{r5\%} \cdot \omega_0$ ) en fonction de l'amortissement  $\xi$  ;
- Le second montre l'évolution des trois premiers dépassements relatifs en fonction de  $\xi$ .

**NB :** les abscisses ( $\xi$ ) sont en échelle logarithmique.

**Q16.** Pour la valeur de  $K_p$  déterminée en Q15., calculer l'amortissement et la pulsation propre de la fonction de transfert en poursuite.

**Q17.** Calculer alors le temps de réponse à 5% et la valeur du premier dépassement relatif de l'asservissement en roulis.

**Q18.** Conclure sur l'aptitude d'une correction proportionnelle à satisfaire les exigences de précision, rapidité et stabilité du cahier des charges.

### 3.2. Performances en régulation

**Q19.** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en régulation  $H_r(p) = \frac{\alpha(p)}{C_{mer}(p)} \Big|_{\alpha_c(p)=0}$  de l'asservissement en roulis du bateau en fonction de  $K_p$ ,  $K_{sv}$  et  $K_b$ .

**NB :** on fera apparaître sur la copie les manipulations/simplifications du schéma bloc afin d'exprimer cette fonction de transfert.

**Q20.** Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un système du deuxième ordre :

$$H_r(p) = \frac{K_2 \cdot \left(1 + \frac{p^2}{\omega_2^2}\right)}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{où } K_2 \text{ est une constante à exprimer en fonction de } K_p, K_{sv} \text{ et } K_a \text{ et } K_1.$$

La réponse temporelle du système est obtenue pour une perturbation sinusoïdale de couple :

$$C_{mer}(t) = C_0 \cdot \sin(\omega_{mer} \cdot t).$$

Au bout de 40 s, le système de stabilisation est activé.

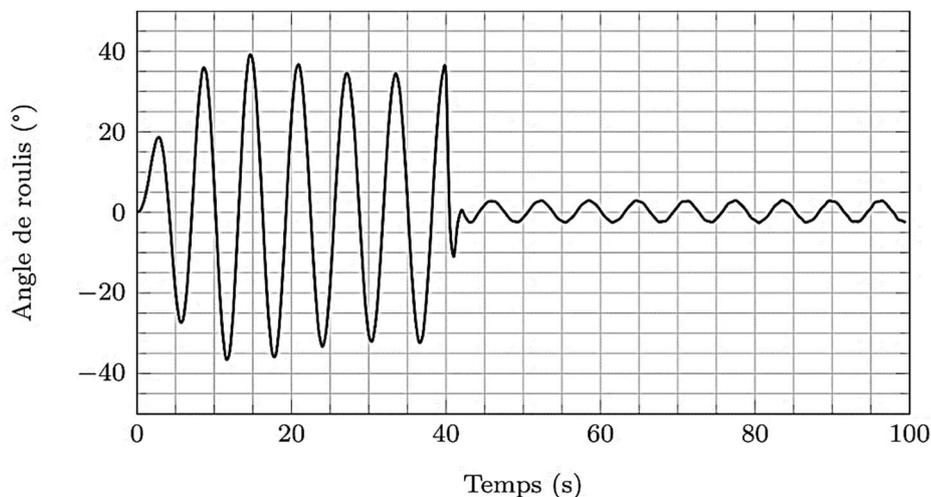


Figure 9 : Angle de roulis (en °) en fonction du temps (en s)

**Q21.** Préciser la pulsation du couple  $C_{mer}(t)$  notée  $\omega_{mer}$  utilisée dans la simulation temporelle. Préciser l'atténuation apportée par le système de stabilisation (rapport de l'amplitude de l'angle de roulis avec stabilisation sur l'amplitude sans stabilisation) à partir de la réponse temporelle (cf. **Figure 9**).

Conclure sur l'exigence d'atténuation du roulis du cahier des charges.