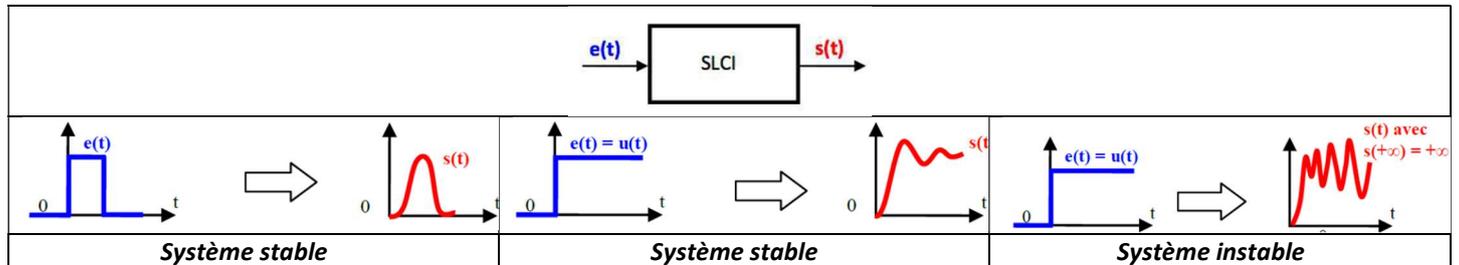


1. Stabilité des systèmes asservis

1.1. Définitions

Définition 1 : Un système est stable si, pour toute entrée bornée correspond une sortie bornée.



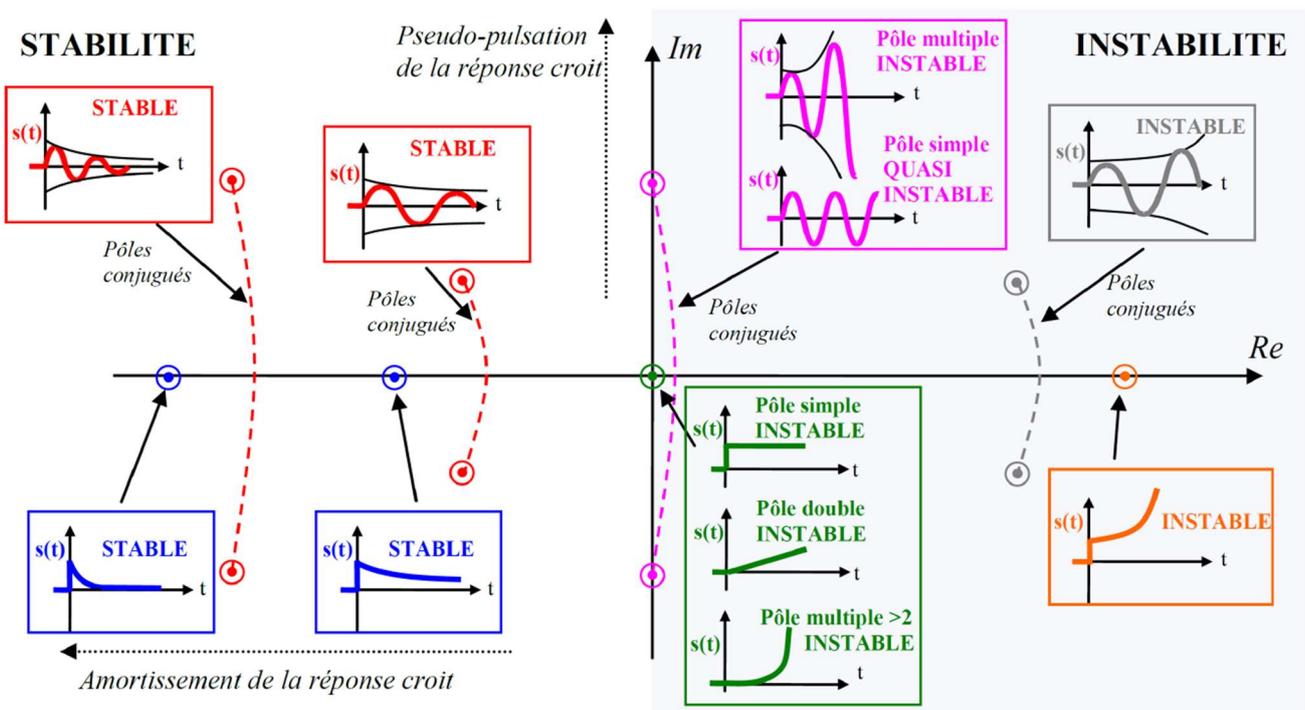
Définition 2 : Un système est stable si la réponse libre du système tend vers 0 pour t tendant vers l'infini.

Etudier la réponse libre d'un système, revient à écarter le système de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre, un système instable a tendance à s'en écarter, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.

On peut montrer que ces définitions sont équivalentes à la définition suivante :

Définition 3 : Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) ne possède que des pôles (racines du dénominateur) à parties réelles strictement négatives.

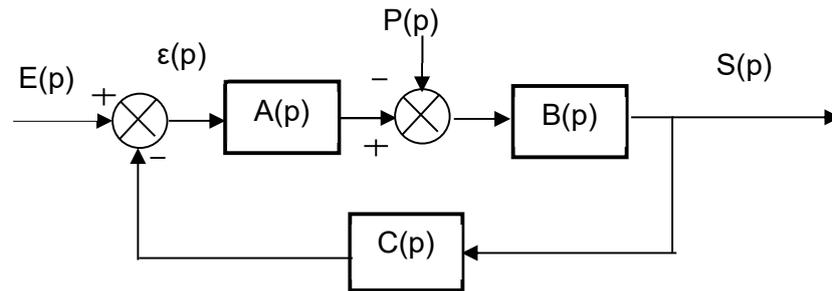
L'exemple ci-dessous donne l'allure des réponses impulsionnelles (entrée $e(t)$ DIRAC) en fonction des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée.



1.2. Influence des perturbations

Dans le cas d'un système subissant des perturbations $P(p)$ si l'on étudie l'évolution de la sortie $s(t)$,

- ✓ d'une part par rapport à l'entrée $e(t)$,
- ✓ d'autre part par rapport à la perturbation $p(t)$.



Théorème de superposition :

$$S(p) = H_1(p) \cdot E(p) + H_2(p) \cdot P(p) = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot E(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot P(p)$$

Les deux fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ ont le même dénominateur, les pôles de ces deux FTBF sont donc les mêmes.

L'étude de stabilité du système comprenant les perturbations est donc la même que celle du système sans perturbation. On ne fera donc **qu'une seule étude de la stabilité** à partir de la FTBF en poursuite :

$$H_1(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P(p)=0}$$

1.3. Critères algébriques de stabilité

Les critères algébriques de stabilité permettent de distinguer **la limite de stabilité du système** à partir de **l'analyse de sa FTBF**, mais ne donnent aucun renseignement sur la robustesse de la stabilité (contrairement aux études effectuées sur la FTBO).

Il existe deux méthodes pour montrer qu'un système est stable à partir de sa FTBF :

- ✓ une méthode qui repose sur la définition 3. Elle consiste à calculer les **pôles** de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) puis à analyser le signe de leurs parties réelles,
- ✓ une méthode qui consiste à utiliser le **critère algébrique de Routh**. Ce critère permet de connaître le signe des parties réelles des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) **sans pour cela les calculer**.
 → *Hors programme : abordé en PSI*

Rappels sur les systèmes de premier et deuxième ordre :

	Systèmes de premier ordre	Systèmes de deuxième ordre
FTBF	$\frac{K}{1 + \tau p}$	$\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$
Expression des pôles	$p_1 = -\frac{1}{\tau}$	$p_1 = -\omega_0(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$ si $\xi > 1$ $p_1 = -\omega_0(\xi \pm j \cdot \sqrt{1 - \xi^2})$ si $\xi < 1$
Les systèmes de premier et deuxième ordre sont INCONDITIONNELLEMENT STABLES		

1.4. Critère graphique de stabilité : CRITÈRE DU REVERS

1.4.1. Introduction et position du problème

Les critères algébriques de stabilité vus précédemment permettent de discuter de la stabilité d'un système en fonction de la variation de ses paramètres.

Les inconvénients de l'utilisation de ces critères résident dans le fait que :

- les calculs deviennent vite complexes dès lors que l'ordre de la fonction de transfert est important,
- il est nécessaire de connaître explicitement la fonction de transfert du système,
- ce critère ne permet pas de réglage (**stabilité absolue théorique**).

Le critère graphique du revers, mis en œuvre à partir des **diagrammes de Bode de la FTBO** (contrairement aux critères algébriques qui exploitent la FTBF), permet non seulement de déterminer la stabilité absolue d'un système, mais aussi de dégager des **marges de stabilité** : en gain et en phase.

1.4.2. Définition

Rappel : les critères algébriques s'appliquent sur la FTBF du système asservi.

Le critère du revers permet d'étudier la stabilité d'un système asservi (c'est-à-dire en boucle fermée BF) à partir de la représentation graphique de la FTBO.

La limite de stabilité d'un système est définie pour :

- | | | |
|-------------------------------------|------|------------------------------|
| • $ FTBO(j\omega) = 1$ | soit | $FTBO_{dB} = 20 \log(1) = 0$ |
| • $Arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ | soit | $\varphi = -180^\circ$ |

1.4.3. Interprétation dans le plan de BODE

D'après la définition précédente, le point critique dans le plan de Bode est défini par $\varphi = -180^\circ$ et $FTBO_{dB} = 0$

Énoncé du critère graphique du revers :

Un système est **stable en boucle fermée** si le tracé du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) présente les caractéristiques suivantes :

- à la pulsation $\omega_{\phi 180}$ pour laquelle le déphasage de la réponse en fréquence en boucle ouverte est égal à -180° , on a : $20 \log |FTBO(j\omega_{\phi 180})| < 0 \text{ dB}$

Ou bien si :

- à la pulsation de coupure ω_{co} pour laquelle $20 \log |FTBO(j\omega_{co})| = 0 \text{ dB}$, le déphasage de la réponse en fréquence en boucle ouverte $\varphi = Arg(FTBO(j\omega_{co}))$ est supérieur à -180° .

La position des diagrammes de Bode ci-contre, nous permet d'affirmer que :

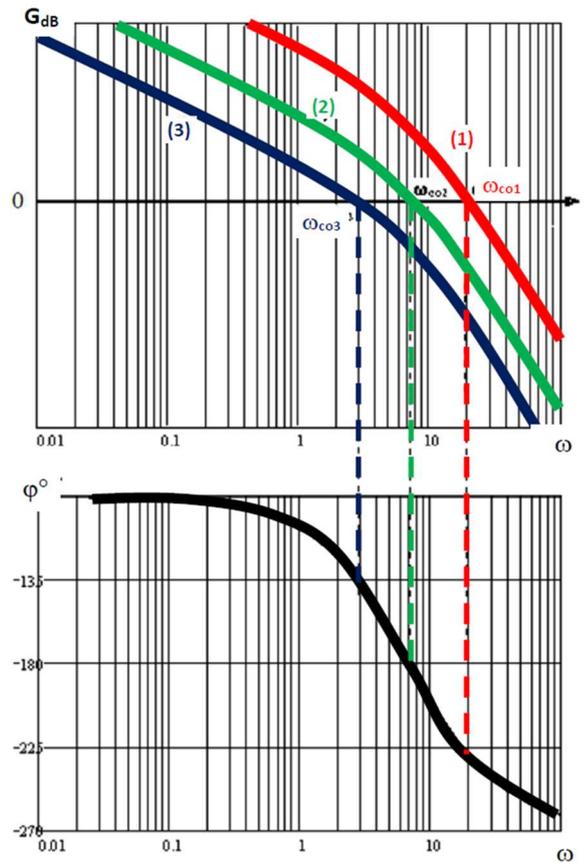
le système (1) est **instable**,

le système (2) est **juste (in)stable**,

le système (3) est **stable**.

Remarque : il faut s'intéresser aux deux graphes pour étudier la stabilité.

Point critique (0 dB, -180°).



1.4.4. Marges de stabilité

Le critère graphique de Revers est un critère de stabilité absolu. En pratique, Il est donc nécessaire de prévoir des « marges » vis à vis du problème d'instabilité, ceci pour plusieurs raisons :

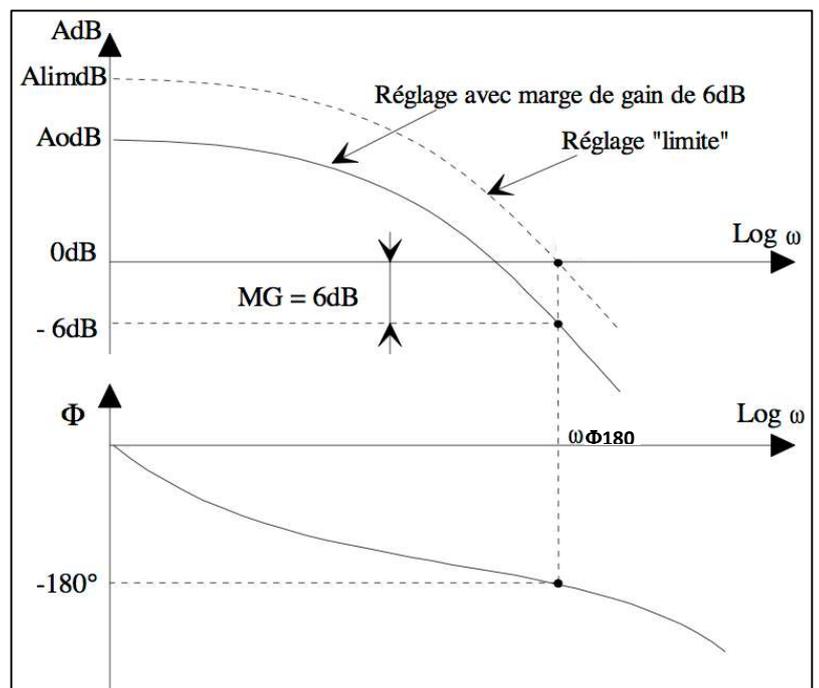
- lors de la conception d'un système, on travaille souvent sur des modèles de fonctions de transfert qui sont imprécis (non pris en compte des phénomènes non-linéaires, retards ...),
- lors de l'utilisation du système, les composants électroniques (résistances, amplificateurs, ...) ont des caractéristiques qui évoluent avec le temps (température, vieillissement...).

L'étude des « marges de stabilité » permet de déterminer graphiquement la robustesse (risque d'instabilité) et de quantifier ce risque. Les marges de stabilité peuvent être évaluées à partir d'une réponse harmonique expérimentale de la FTBO sur un système existant.

Critère de la marge de gain :

La marge de gain est la distance **MG** (en dB) entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique (0dB, -180°) mesurée parallèlement à l'axe du gain, soit :

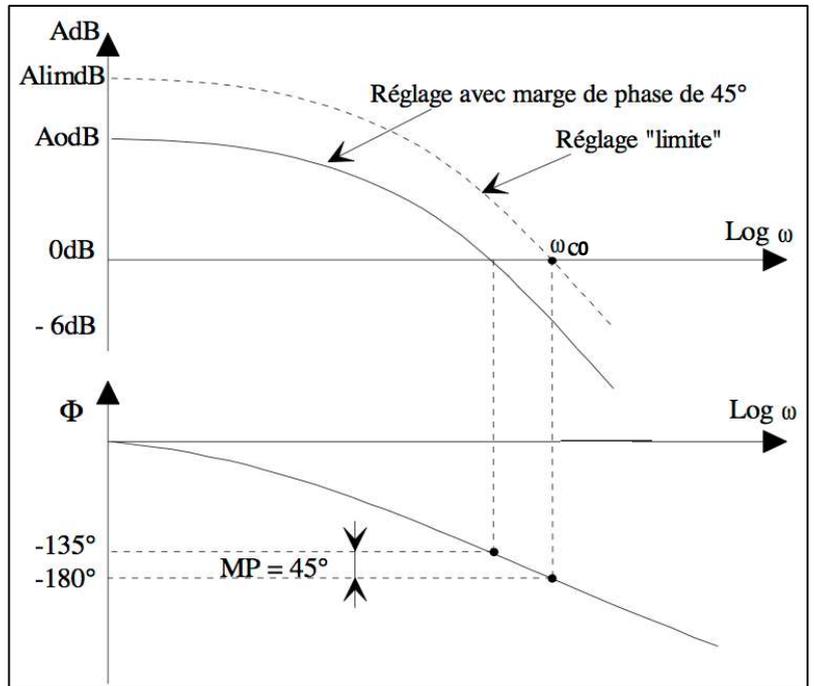
$$MG = -20 \log |FTBO(j\omega_{\phi 180})|$$



Critère de la marge de phase :

La marge de phase est la distance $M\phi$ (en degré) entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique (0dB, -180°) mesurée parallèlement à l'axe de la phase, soit :

$$M\phi = 180^\circ + \text{Arg}[FTBO(j\omega_{co})]$$



On considèrera qu'un système a des marges de stabilité suffisantes pour les valeurs usuelles suivantes :

$$12 \text{ dB} < MG < 6 \text{ dB}$$

$$M\phi > 45^\circ$$

1.5. Réglage d'un système asservi

Trois cas peuvent se présenter :

Cas 1 : Le système est stable mais lent et peu précis. On augmente le gain jusqu'à l'obtention de la rapidité désirée : les performances augmentent et deviennent satisfaisantes.

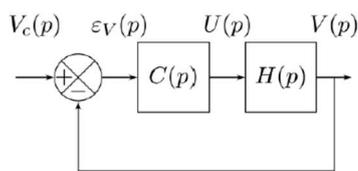
Cas 2 : Le système est rapide et précis mais instable. On diminue le gain jusqu'à l'obtention de la marge de phase ou de la marge de gain désirée : malgré leur diminution, les performances restent satisfaisantes.

Cas 3 : Après réglage du gain permettant l'obtention de la stabilité, les performances sont insuffisantes, soit qu'elles n'aient pas suffisamment augmenté en partant du cas 1, soit qu'elles aient trop diminué en partant du cas 2. Il faudra prendre des dispositions complémentaires (ajouter un correcteur, modifier la structure de l'asservissement, ...) que l'on étudiera en deuxième année.

Voir exemple introductif page suivante

L'asservissement de vitesse est à présent modélisé par le schéma-blocs de la Figure 9 à retour unitaire. Cet asservissement n'est valable que pour les petites variations de vitesse.

$H(p)$ correspond à la fonction de transfert en boucle ouverte naturelle (non corrigée), $C(p)$ est le correcteur.



$$H(p) = \frac{K_N}{(1 + T_m \cdot p) \cdot (1 + T_e \cdot p)}$$

où : $K_N = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

et $T_m \approx 5 \text{ s}$

$T_e \approx 0,5 \text{ s}$

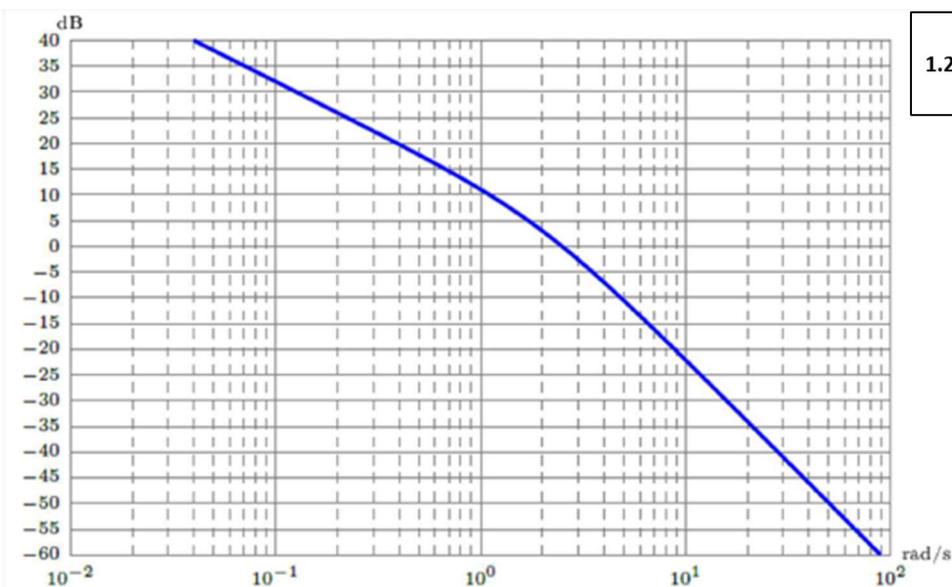
Figure 9 : Schéma-blocs simplifié (sans perturbation)

Le concepteur a choisi le correcteur Proportionnel Intégral : $C_2(p) = \frac{C}{T_i \cdot p} \cdot (1 + T_i \cdot p)$ avec $T_i = T_m$.

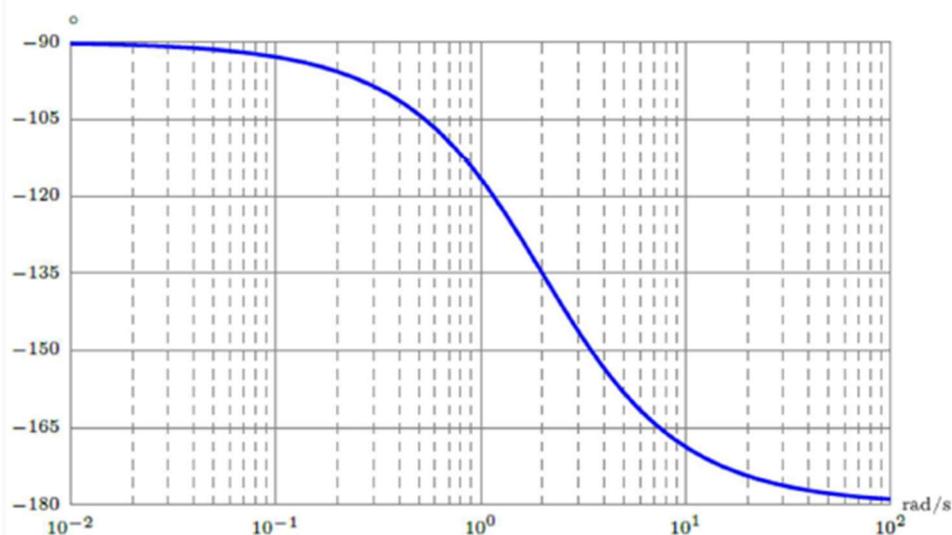
Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée de l'asservissement avec $C_2(p)$ sont fournis sur le cahier réponses question 14. Ces diagrammes de Bode ont été tracés avec la valeur particulière $C = 1$.

L'abaque du temps de réponse réduit $t_{5\%} \cdot \omega_0$ en fonction de l'amortissement ξ est fourni en Figure 10.

Question 14 Déterminer la condition (notée C_φ) sur le gain C du correcteur permettant de satisfaire uniquement le critère de marge de phase de l'exigence 1.2.2 du cahier des charges. Faire l'application numérique (on pourra utiliser la courbe fournie en annexe 1).



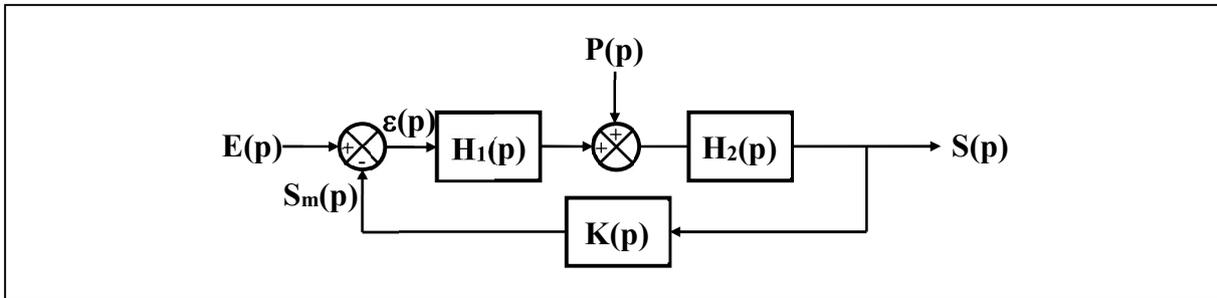
1.2.2	Stabilité :	Marge de gain	$M_G \geq 12\text{dB}$
		Marge de phase	$M_\varphi \geq 45^\circ$



2. Précision des systèmes asservis

2.1. Définitions

On considère le système asservi décrit par le schéma bloc suivant. Son rôle est de faire suivre à la sortie $\mathbf{s}(t)$ une loi déterminée en général par la consigne $\mathbf{e}(t)$. Afin d'évaluer la précision du système, on définit l'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ à un instant donné comme la différence entre la consigne $\mathbf{e}(t)$ et la mesure $\mathbf{s}_m(t)$. La précision sera d'autant meilleure que $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ tendra vers $\mathbf{0}$.



Son étude se fait en utilisant les transformées de LAPLACE. L'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}(p)$ résulte de la somme de :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_E(p)$: erreur due à la consigne $\mathbf{E}(p)$ seule \Rightarrow étude en **poursuite** ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_P(p)$: erreur due à la perturbation $\mathbf{P}(p)$ seule \Rightarrow étude en **régulation**.

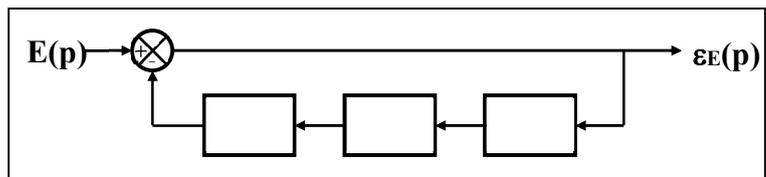
On détermine l'expression de $\boldsymbol{\varepsilon}(p)$ en appliquant le théorème de superposition : $\boldsymbol{\varepsilon}(p) = \boldsymbol{\varepsilon}_E(p) + \boldsymbol{\varepsilon}_P(p)$. Elle se calcule simplement en envisageant les deux cas suivants :

- ✎ **Compléter les schémas blocs en faisant apparaître $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $K(p)$.
Exprimer en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $K(p)$ les fonctions de transfert demandées.**

- Si on suppose que $\mathbf{P}(p) = \mathbf{0}$, le schéma bloc peut se mettre sous la forme :

La FTBF s'écrit dès lors :

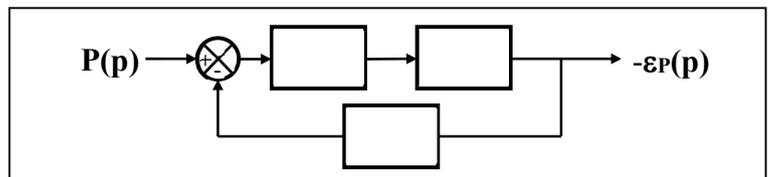
$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_E(p)}{E(p)} = \dots\dots\dots$$



- Si on suppose que $\mathbf{E}(p) = \mathbf{0}$, le schéma bloc peut se mettre sous la forme :

La FTBF s'écrit dès lors :

$$-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_P(p)}{P(p)} = \dots\dots\dots$$



Comme $H_{BO}(p) = K(p)H_1(p)H_2(p)$ et en vertu du théorème de superposition, il vient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(p) = \dots\dots\dots$$

Si on observe $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ sur un intervalle de temps fini, on parlera de **précision dynamique** (l'erreur dépend du temps). En revanche, si observe $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ au bout d'un temps suffisamment long pour que le système se trouve en régime permanent, on parlera de **précision statique**.

2.2. Précision statique (perturbation nulle)

Les calculs liés à la **précision statique** se déclinent principalement en :

- Erreur de position ε_p (lorsque $e(t)$ ou $p(t)$ est un échelon)
- Erreur de traînage ε_T (lorsque $e(t)$ ou $p(t)$ est une rampe)
- Erreur d'accélération ε_A (lorsque $e(t)$ ou $p(t)$ est une parabole)

Ces trois types d'erreurs sont les plus usités et on verra qu'elles peuvent jouer un rôle important dans le choix du correcteur à mettre en place.

2.3. Expression générale de l'erreur

La **précision** du système sera mesurée par la valeur de $\varepsilon(t)$ en régime permanent, c'est à dire :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$$

À l'aide du théorème de la valeur finale, exprimer ε en fonction de $H_{BO}(p)$ et $E(p)$.

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \dots\dots\dots$$

La FTBO peut généralement se mettre sous la forme suivante :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{1 + b_1 p + \dots + b_n p^{n-\alpha}}$$

Dans cette expression, α désigne la **classe du système** en BO et K le **gain statique**.
 α représente en fait le **nombre d'intégrateurs** présents dans la BO.

Pour assurer la causalité, on doit avoir $m \leq n$.

Déterminer au voisinage de $p \approx 0$ l'expression de $H_{BO}(p)$:

$$H_{BO}(p) \approx \dots\dots\dots$$

En déduire l'expression de ε en fonction de p , α et K :

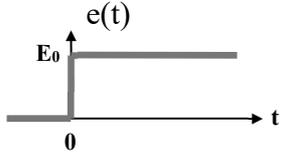
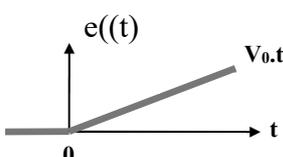
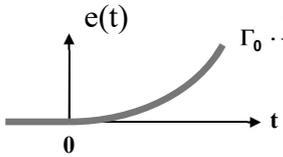
$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \dots\dots\dots$$

Pour que celle-ci soit faible, il faut que la constante K soit grande, ce qui va à l'encontre de ce qui a été dit sur la stabilité dans le paragraphe précédent.

On en conclut que les conditions de **stabilité** et de **précision** sont **contradictoires**.

2.4. Tableau récapitulatif

☞ Compléter le tableau suivant qui résume la valeur de l'erreur finale en fonction de la sollicitation d'entrée $e(t)$ et de la classe α du système en BO.

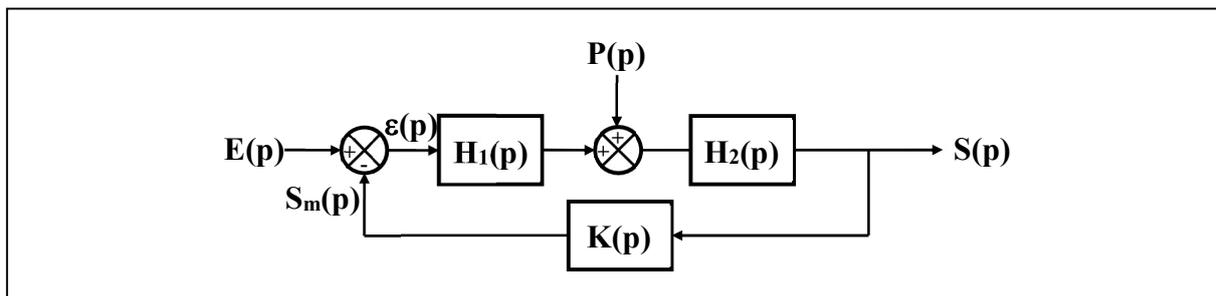
Erreur de position	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
<p>Système soumis à un échelon :</p>  <p>$e(t) = E_0 u(t)$</p> <p>$E(p) = \text{---}$ $\Rightarrow \varepsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} \text{---}$</p>				
<p>Système soumis à une rampe :</p>  <p>$e(t) = V_0 \cdot t \cdot u(t)$</p> <p>$E(p) = \text{---}$ $\Rightarrow \varepsilon_T = \lim_{p \rightarrow 0} \text{---}$</p>				
<p>Système soumis à une parabole :</p>  <p>$e(t) = \Gamma_0 \cdot \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$</p> <p>$E(p) = \text{---}$ $\Rightarrow \varepsilon_A = \lim_{p \rightarrow 0} \text{---}$</p>				

☐ Nota : L'erreur de position est aussi appelée **erreur indicielle** ou **erreur statique**.

**Il faut au moins une intégration en BO pour annuler l'erreur de position (ou erreur statique).
Il en faut au moins deux en BO pour annuler l'erreur de traînage et trois pour annuler celle d'accélération.
Si le système à commander n'en possède pas (ou pas assez), c'est le rôle du correcteur de les amener.**

2.5. Influence d'une perturbation

On reprend le système asservi présenté en début de paragraphe :



Afin de ne tenir compte que de la perturbation $\mathbf{P}(p)$, on considère que $\mathbf{E}(p) = \mathbf{0}$.
 Dans ces conditions, on a montré au paragraphe 2.1 que :

$$-\varepsilon(p) = \dots\dots\dots$$

On étudie l'influence d'une **perturbation en échelon** sur le système : $\mathbf{P}(p) = \frac{P_0}{p}$.

D'après le théorème de la valeur finale :

$$-\varepsilon = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \dots\dots\dots$$

On suppose par la suite que $\mathbf{K}(p) = \mathbf{K}_r > \mathbf{0}$. Comme $\mathbf{P}(p)$ intervient entre les blocs $\mathbf{H}_1(p)$ et $\mathbf{H}_2(p)$, on va différencier le **nombre d'intégrateurs** présents dans chacun de ces blocs :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \cdot \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

où les numérateurs et dénominateurs de $\mathbf{H}_1(p)$ et $\mathbf{H}_2(p)$ sont tels que $\mathbf{N}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{D}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{N}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{D}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.

Comme au voisinage de $p \approx 0$, $H_1(p) \approx \frac{K_1}{p^{\alpha_1}}$ et $H_2(p) \approx \frac{K_2}{p^{\alpha_2}}$, l'erreur en régime permanent s'écrit :

$$-\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} P_0 \frac{\frac{K_2}{p^{\alpha_2}} K_r}{1 + \frac{K_1 K_2 K_r}{p^{\alpha_1 + \alpha_2}}} = \lim_{p \rightarrow 0} P_0 \frac{K_2 K_r p^{\alpha_1}}{K_1 K_2 K_r + p^{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

Elle est **nulle** si $\alpha_1 \geq 1$, vaut $\frac{K_2 K_r}{K_1 K_2 K_r + 1} P_0$ si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\frac{1}{K_1} P_0$ si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \geq 1$.

Un système comportant, en BO, au moins une intégration en amont du point d'application de la perturbation ($\alpha_1 \geq 1$) présente une erreur statique nulle en réponse à un échelon de perturbation. Une éventuelle intégration après celle-ci n'aurait aucune influence.

□ **Nota** : Il faudra au moins deux intégrateurs en amont du point de d'application de la perturbation pour annuler l'effet d'une perturbation de type rampe.

3. Conclusion

Dans tous les cas de figure, on voit qu'il faut des intégrateurs dans la boucle pour annuler l'erreur $\varepsilon(t)$. Si le système à commander n'en possède pas (ou pas assez), on a dit qu'il fallait les apporter avec un correcteur. Cela semble donc facile d'obtenir un système bouclé précis.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il faut aussi et surtout que le système bouclé soit stable. Or l'effet d'un intégrateur sur la phase de la FTBO sera d'apporter -90° quelle que soit la valeur de ω . On peut se douter que perdre 90° aura forcément un effet négatif sur la marge de phase $\mathbf{M}\phi$ (qui pourra même devenir négative) et donc sur la **stabilité**.

On vient de mettre le doigt sur un dilemme que l'automaticien a toujours à l'esprit : il faudra faire un compromis entre la stabilité (ou plutôt les marges de stabilité) et la précision.