

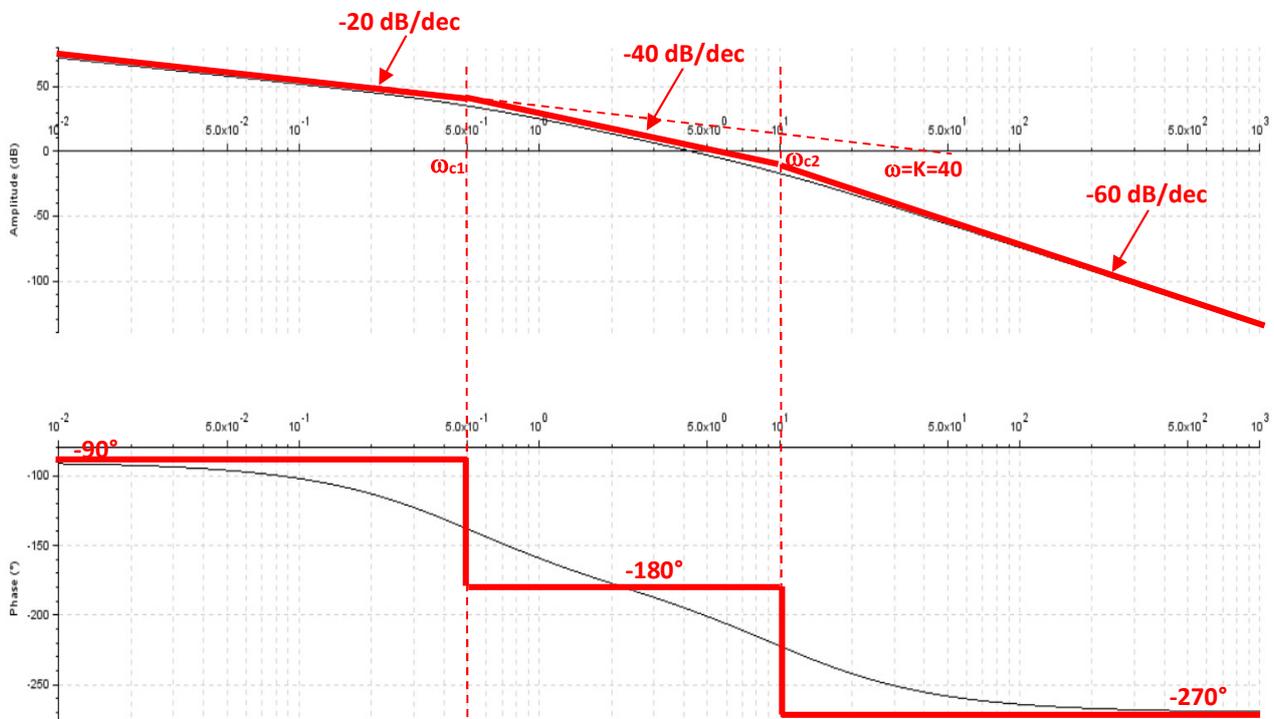
DOCUMENT RÉPONSES

CORRIGÉ**Note :**Observations :

COURS

$$G(p) = \frac{40}{p \cdot (1 + 2,1p + 0,2p^2)} = \frac{40}{p \cdot (1 + 0,1p) \cdot (1 + 2p)}$$

Attention : $G(p)$ étant le produit d'un intégrateur et d'une FT d'ordre 2, on calcule l'amortissement de la FT d'ordre 2 afin de l'écrire sous sa forme factorisée de 2 FT d'ordre 1 si celui-ci est supérieur à 1. C'est le cas ici.



Aux BF : la FT est équivalente à l'intégrateur :

G_{dB} : asymptote de pente -20 dB/dec qui coupe l'axe des pulsations à 40 rad.s^{-1} .

Phase : asymptote à -90°

À partir de $\omega_{c1} = 1/2 = 0,5 \text{ rad.s}^{-1}$:

G_{dB} : asymptote de pente $-20-20 = -40 \text{ dB/dec}$ (car pulsation de cassure d'un 1^{er} ordre)

Phase : asymptote à $-90-90 = -180^\circ$ (pour les mêmes raisons).

À partir de $\omega_{c2} = 1/0,1 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$:

G_{dB} : asymptote de pente $-40-20 = -60 \text{ dB/dec}$ (car pulsation de cassure d'un 1^{er} ordre)

Phase : asymptote à $-180-90 = -270^\circ$ (pour les mêmes raisons).

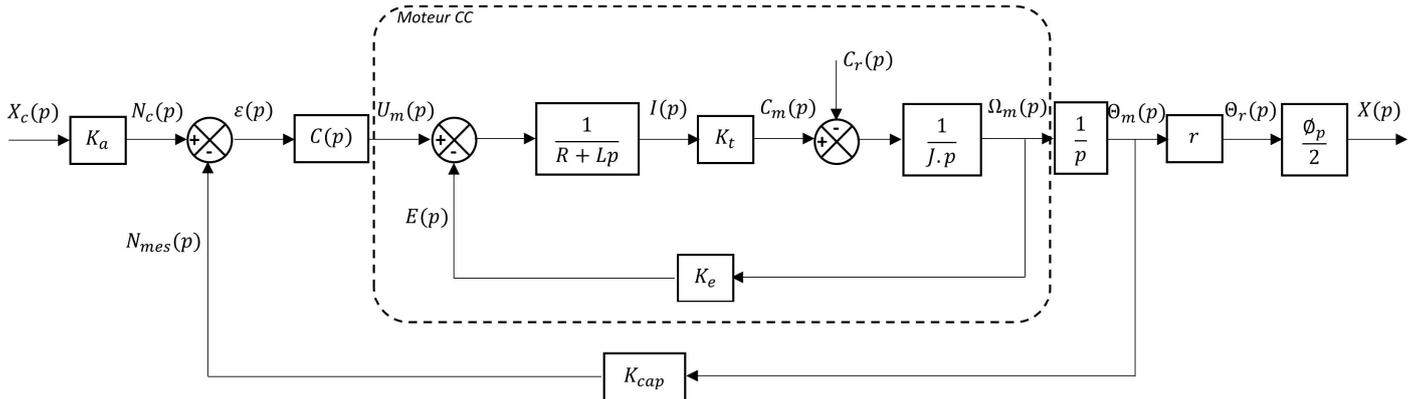
On remarque que $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ (plus d'une décade d'écart) on peut donc considérer :

G_{dB} : le tracé réel présentera une atténuation de -3dB par rapport au tracé asymptotique à ω_{c1} et ω_{c2} ,

Phase : $\varphi(\omega_{c1}) = -135^\circ$ et $\varphi(\omega_{c2}) = -225^\circ$.

Robot de traite automatique LELY

Q1. Schéma-blocs à compléter :



Q2. Calcul de K_{cap} :

$$K_{cap} = \frac{2 \text{ (voies)} \times 2 \text{ (comptage sur fronts montants et descendants)} \times 36 \text{ (fentes par voie)}}{2\pi}$$

D'où $K_{cap} = 22,9 \text{ incréments.rad}^{-1}$

Q3. Expression et calcul de K_a :

Quand $X(p) = X_c(p)$, on souhaite $\varepsilon(p) = 0$.

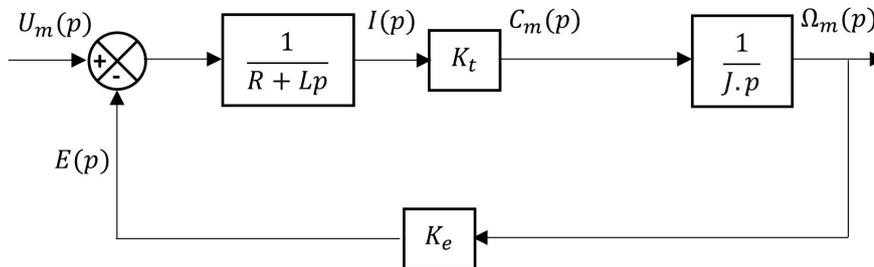
Or $\varepsilon(p) = K_a \cdot X_c(p) - K_{cap} \cdot \frac{2}{r \cdot \phi_p} \cdot X(p) \Rightarrow K_a = \frac{2}{r \cdot \phi_p} \cdot K_{cap}$

AN : $K_a = 17,4 \text{ incréments.mm}^{-1}$

Q4. Expressions littérales sous forme canonique de $H_1(p)$ et $H_2(p)$:

- $C_r(p) = 0$

Le schéma bloc devient :

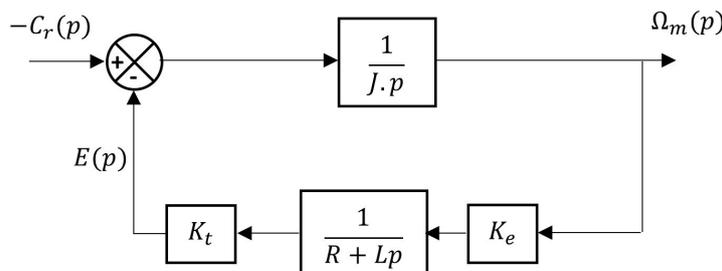


En appliquant le théorème de Black, on obtient :

$$H_1(p) = \frac{1}{K_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RJ}{K_t K_e} p + \frac{LJ}{K_t K_e} p^2}$$

- $X_c(p) = 0$

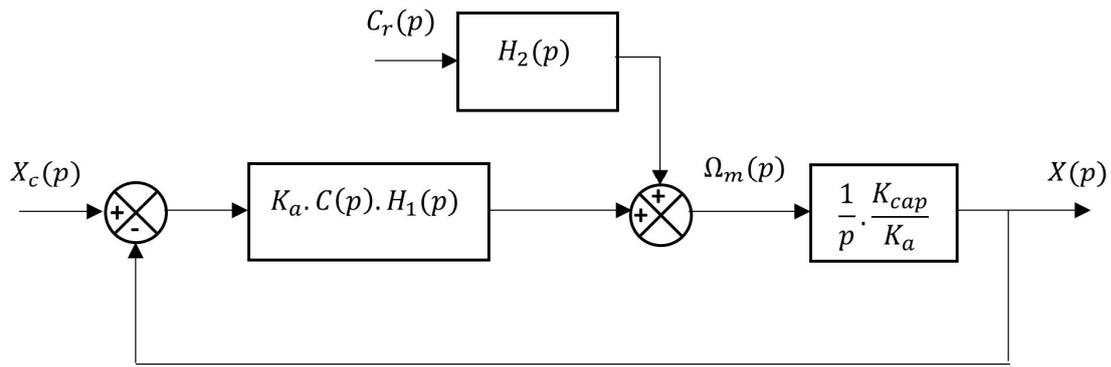
Le schéma bloc devient :



En appliquant le théorème de Black, on obtient :

$$H_2(p) = -\frac{R}{K_t K_e} \cdot \frac{1 + \frac{L}{R} p}{1 + \frac{RJ}{K_t K_e} p + \frac{LJ}{K_t K_e} p^2}$$

Q5. Schéma-blocs à retour unitaire et expression de $H_{BO1}(p)$:



$$H_{BO1}(p) = \frac{K_{cap} \cdot C(p)}{p} \cdot H_1(p)$$

Q6. Expression des pôles d'une fonction de transfert d'ordre 2 :

- Si $\xi \geq 1$: $p_i = \omega_0 \cdot (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$
- Si $\xi < 1$: $p_i = \omega_0 \cdot (-\xi \pm j \cdot \sqrt{1 - \xi^2})$

Q7. Justification de la simplification de $H_1(p)$ et calcul de ces paramètres caractéristiques :

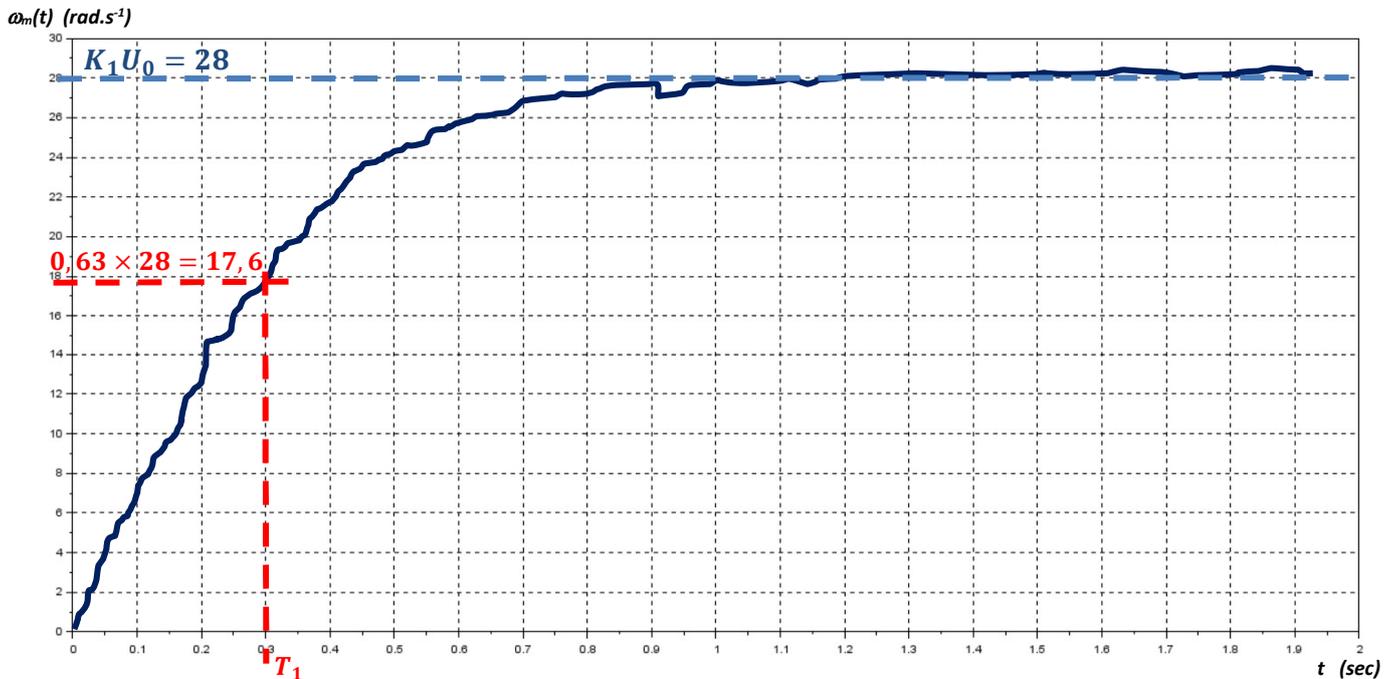


Figure 5 : Réponse indicielle du moteur seul ($C_r=0$) à un échelon de tension $U_0=48V$

La réponse indicielle présente une tangente à l'origine oblique et pas de dépassements.

$H_1(p)$ peut donc être assimilée à une fonction de transfert d'ordre 1 : $H_1(p) = \frac{K_1}{1+T_1 \cdot p}$

Par identification, on obtient : $K_1 = 0,58 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$
 $T_1 = 0,3 \text{ s}$

Q8. Expression de $\omega_m(t)$ en fonction de U_0 et des paramètres identifiés :

$$\omega_m(t) = K_1 \cdot U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \quad \text{AN : } \omega_m(t) = 28 \cdot (1 - e^{-3,3 \cdot t})$$

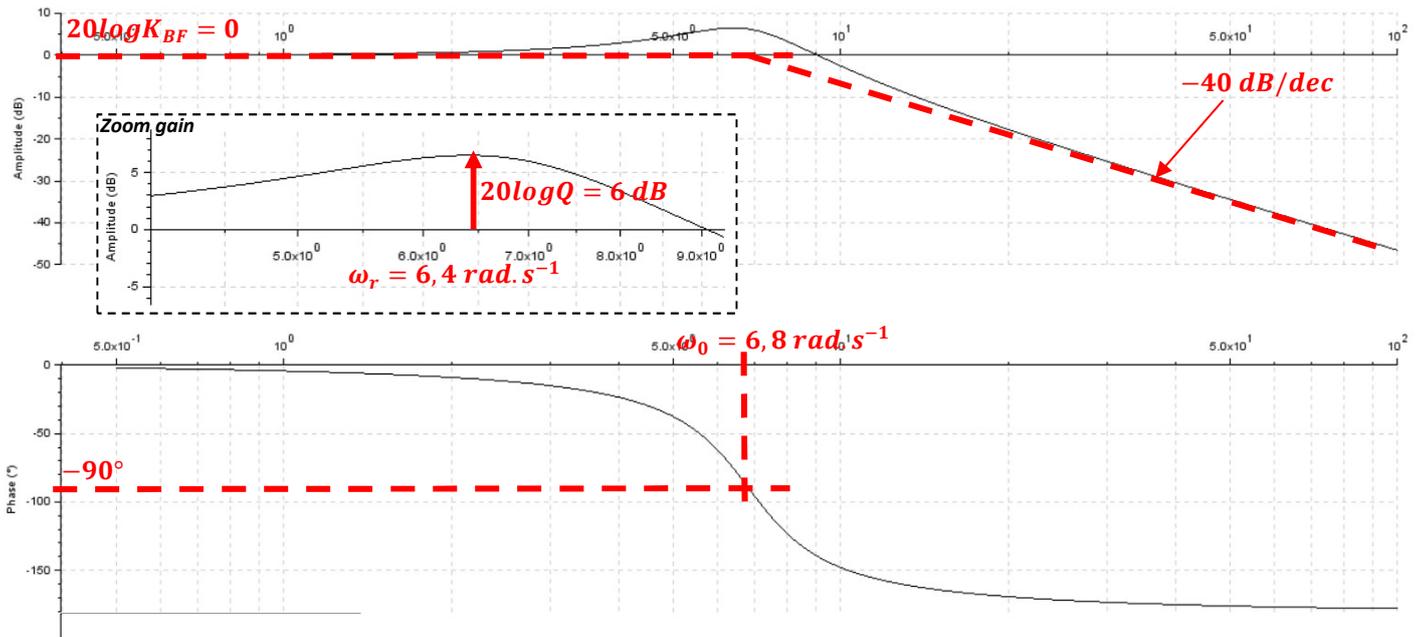
Q9. Expression littérale sous forme canonique de $H_{BF}(p)$ et de ses paramètres caractéristiques :
En appliquant le théorème de Black, on obtient :

$$H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{corr}K_{BO}}p + \frac{T_{BO}}{K_{corr}K_{BO}}p^2}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \boxed{K_{BF} = 1} \\ \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{K_{corr}K_{BO}} &\Rightarrow \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_{corr}K_{BO}T_{BO}}} \\ \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{T_{BO}}{K_{corr}K_{BO}} &\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}K_{BO}}{T_{BO}}} \end{aligned}$$

Q10. Calcul des différents paramètres caractéristiques de $H_{BF}(p)$:



Diagrammes de Bode de $H_{BF}(p)$ pour $C(p) = K_{corr} = 1$

Aux BF, le gain dB présente une asymptote horizontale à 0 dB -> classe 0 et $\boxed{K_{BF} = 1}$

Aux HF, le gain dB présente une asymptote de pente -40 dB/dec -> ordre 2

On observe une résonance -> $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi(\omega_0) = -90^\circ \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 6,8 \text{ rad.s}^{-1}}$$

On détermine ξ :

- Par lecture de la pulsation de résonance : $\omega_r = 6,4 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$, ou
- Par lecture de $20 \log Q = 6 \text{ dB}$ et $Q = \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$.

On obtient $\boxed{\xi = 0,24}$

Calcul du premier dépassement relatif :

$$D_1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \text{ avec la valeur de } \xi = 0,24 \text{ identifiée précédemment, il vient } \boxed{D_1 = 46\%}.$$

Conclusion sur les exigences de précision et d'amortissement :

- L'exigence de précision sera respectée car $K_{BF} = 1$ donc l'erreur statique sera nulle pour une consigne de déplacement en échelon,
- L'exigence d'amortissement ne sera pas respectée car l'axe asservi présente du dépassement.

Q11. Calculer de K_{corr}^{MAX} , permettant de satisfaire à la fois les exigences de précision et d'amortissement :
 K_{BF} ne dépendant pas de K_{corr} , la valeur de K_{corr}^{MAX} est déterminée à partir de l'exigence d'amortissement.

Afin que l'axe asservi ne présente aucun dépassement, il faut $\xi > 1$.

A partir de l'expression de ξ obtenue en Q9, il faut donc $\frac{1}{2\sqrt{K_{corr}K_{BO}T_{BO}}} > 1 \Rightarrow \boxed{K_{corr}^{MAX} = \frac{1}{4.K_{BO}T_{BO}}}$

Or d'après Q10 (identification de $H_{BF}(p)$ pour $K_{corr}=1$) $\xi = 0,24 = \frac{1}{2\sqrt{K_{BO}T_{BO}}}$ soit $\frac{1}{4.K_{BO}T_{BO}} = 0,24^2$

AN : $\boxed{K_{corr}^{MAX} = 0,06}$

Q12. Calcul du temps de réponse à 5 % pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$:

Pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$, $\xi = 1$ soit, d'après l'abaque du temps de réponse réduit (figure 7), $T_{r5\%} \cdot \omega_0 = 5$.

Soit $T_{r5\%} = \frac{5}{\omega_0}$. Or d'après Q9, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}K_{BO}}{T_{BO}}}$ et, d'après Q10, pour $K_{corr} = 1$, on a $\omega_0 = 6,8 \text{ rad.s}^{-1}$, soit

$\sqrt{\frac{K_{BO}}{T_{BO}}} = 6,8$. Finalement, $\omega_0 = 6,8\sqrt{K_{corr}}$.

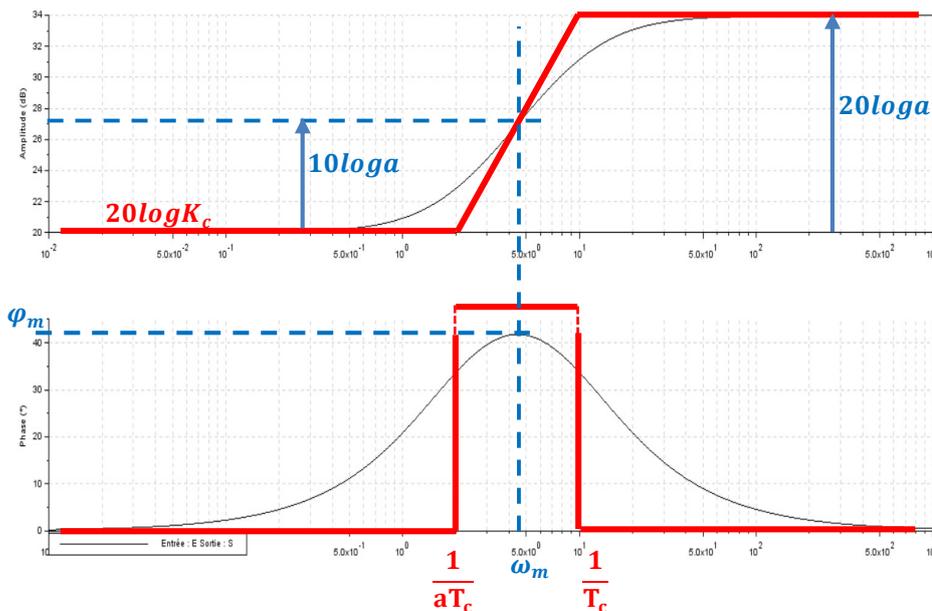
Pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$ on a donc $\boxed{T_{r5\%} = \frac{5}{6,8 \times \sqrt{0,06}} = 3 \text{ s}}$

Q13. Conclusion sur la correction proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre :

La correction proportionnelle pure :

- permet de satisfaire l'exigence de précision quelle que soit la valeur de K_{corr} ,
- ne permet pas de satisfaire simultanément les exigences d'amortissement et de rapidité.

Q14. Diagrammes de Bode asymptotiques et allure des réels du correcteur à avance de phase :



Q15. Expression de la ω_m en fonction de a et de T_c :

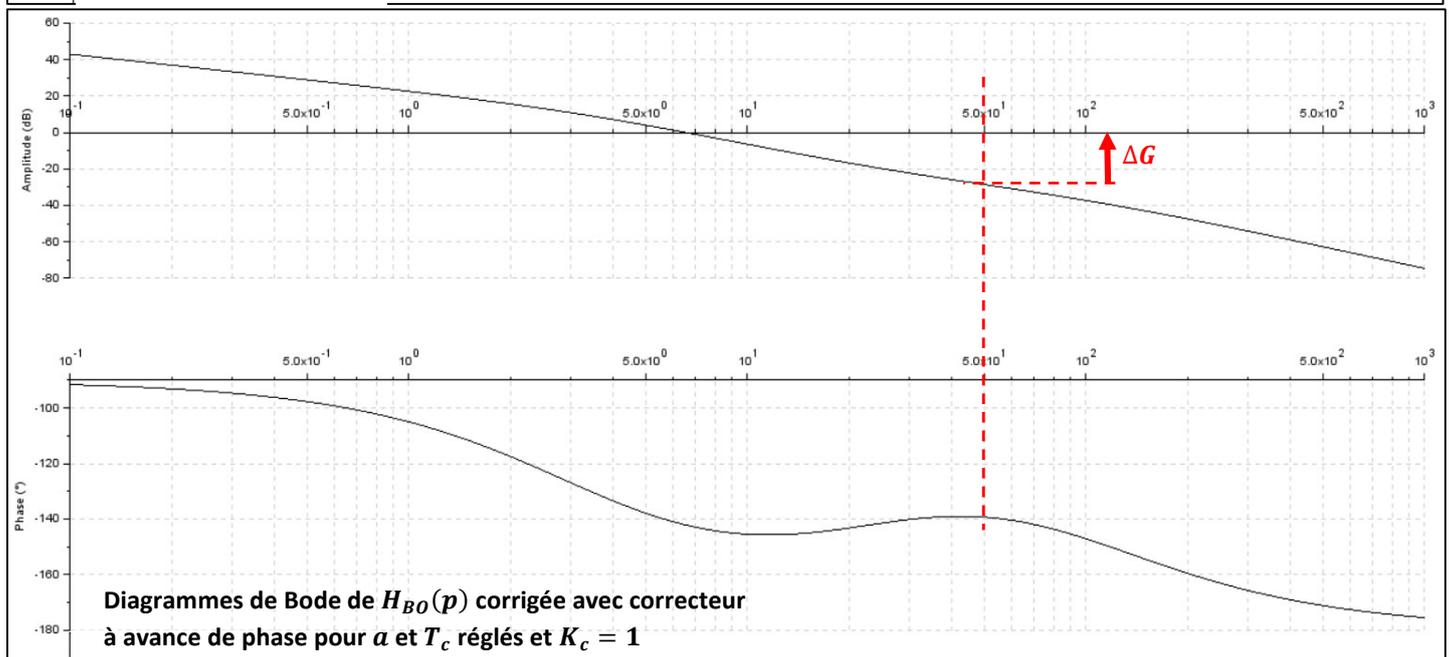
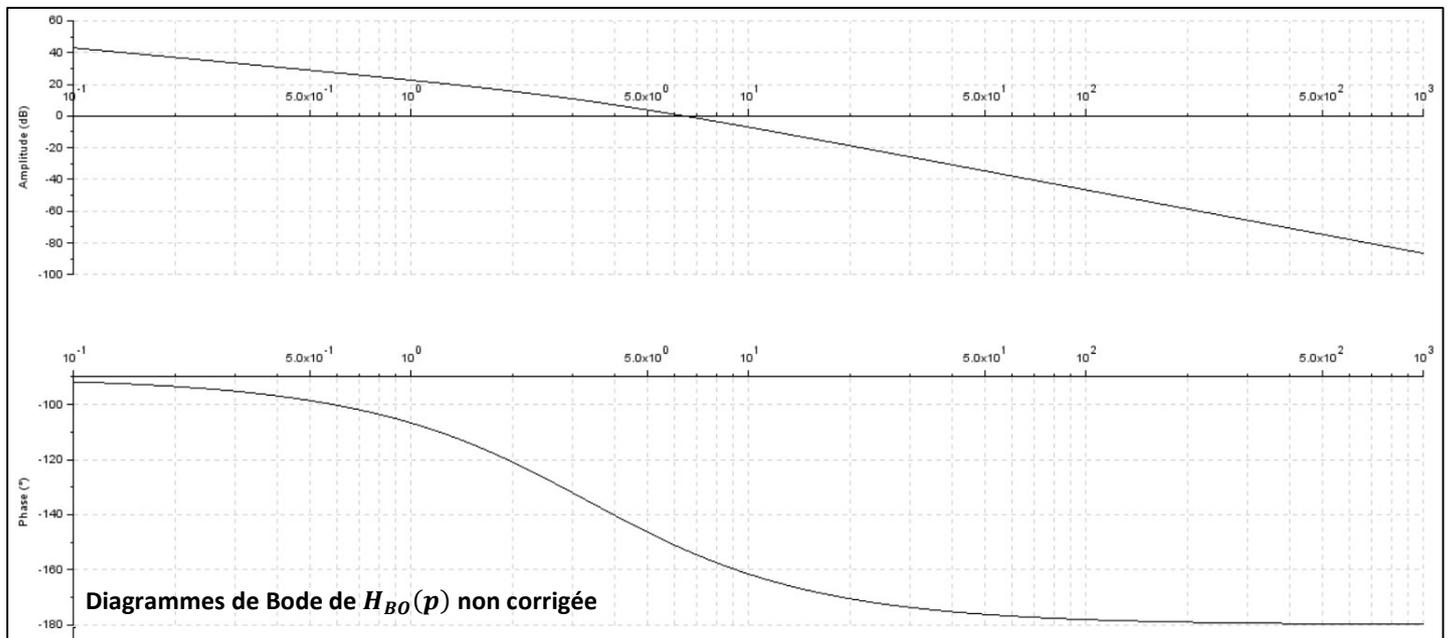
ω_m est au milieu des deux pulsations de cassure soit, en échelle log, $\boxed{\omega_m = \frac{1}{T_c \sqrt{a}}}$

NB1 : on peut retrouver cette expression en dérivant l'expression de la phase et ω_m est telle que $\frac{d\varphi}{d\omega} = 0$

NB2 : $\varphi_m = \text{Arcsin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$ (valeur remarquable qu'il faudra retenir en 2^{ème} année).

Q16. Expression du gain dB à la pulsation ω_m en fonction de a et de K_c :

$$\boxed{C_{dB} = 20 \log K_c + 10 \log a}$$



Q17. Justification de l'effet du correcteur à avance de phase sur les diagrammes de Bode de $H_{BO}(p)$ corrigée :
 On voit nettement qu'autour de $\omega = \omega_m = \frac{1}{T_c \sqrt{\alpha}}$, le correcteur a pour effet d'augmenter la phase de la boucle ouverte (d'où son nom : « avance de phase »).

Q18. Influence de K_c sur les diagrammes de Bode de $H_{BO}(p)$ corrigée :

Gain dB : Translation verticale de la courbe du gain de $20 \log K_c$

En effet, $H_{BOdB}(\omega) = 20 \log K_c + H_{BOdB}^{K_c=1}(\omega)$

Phase : Aucune influence.

En effet, $\varphi_{BO}(\omega) = Arg(K_c) + \varphi_{BO}^{K_c=1}(\omega)$ et $Arg(K_c) = 0$ car $K_c > 0$

Q19. Calcul de K_c^{MIN} :

Afin que la pulsation de coupure de la boucle ouverte corrigée soit supérieure à 50 rad.s^{-1} , il faut que le réglage de K_c permette de traduire verticalement la courbe du gain d'au moins ΔG_{dB} (voir diagramme de Bode sur lequel on lit $\Delta G_{dB} = 28 \text{ dB}$).

Soit $20 \log K_c^{MIN} = 28 \Rightarrow K_c^{MIN} = 10^{\frac{28}{20}} \Rightarrow \boxed{K_c^{MIN} = 25}$