

1. Introduction : les trois types de systèmes automatisés

Un système automatisé est un système qui réalise, de manière **autonome**, des opérations du processus de transformation de la matière d'œuvre. L'intervention de l'homme est alors limitée à la **programmation**, la mise en marche et les **réglages** de certains **paramètres**.

Un système automatisé est utilisé pour réaliser des tâches :

- trop **complexes** ou **dangereuses** pour l'homme :



Centre d'usinage de précision



Robot d'inspection du cœur d'une centrale

- **répétitives** et **pénibles** :



Robot soudeur



« Robots guides » d'un complexe financier

Parmi les systèmes automatisés on distingue :

1.1. Les systèmes logiques

La grandeur de sortie du système est élaborée à partir d'une combinaison des grandeurs d'entrée.



Digicode

1.2. Les systèmes à évènements discrets

La grandeur de sortie du système est élaborée à partir d'une combinaison des grandeurs d'entrée, mais prend également en compte la chronologie des évènements et l'état précédent du système.



Feu tricolore

1.3. Les systèmes continus

Les grandeurs de sortie évoluent de manière continue en fonction du temps.



2. Performances des systèmes continus

Afin de répondre au mieux aux besoins de l'utilisateur, un système continu doit présenter des performances les plus proches possible de celles définies dans le **cahier des charges fonctionnel**.

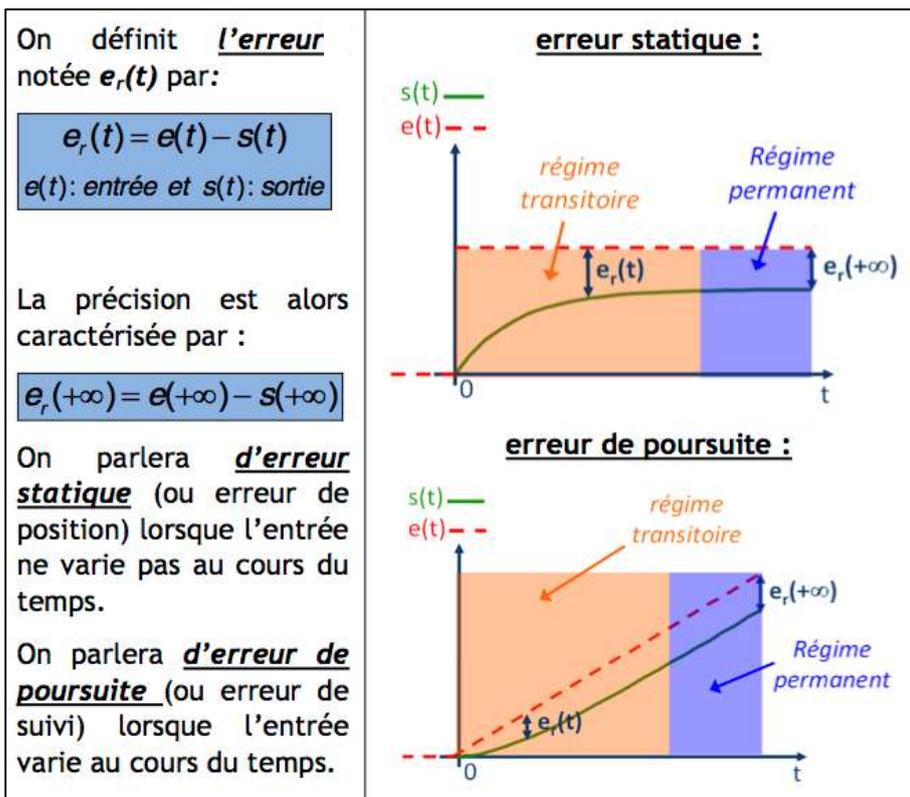
Pour vérifier ces performances et déterminer les **réglages** permettant de les optimiser, on utilise différents **critères**.



2.1. La précision, caractérisée par l'erreur

La précision est évaluée par la différence entre la valeur souhaitée (entrée) et la valeur réellement atteinte en régime permanent (sortie)

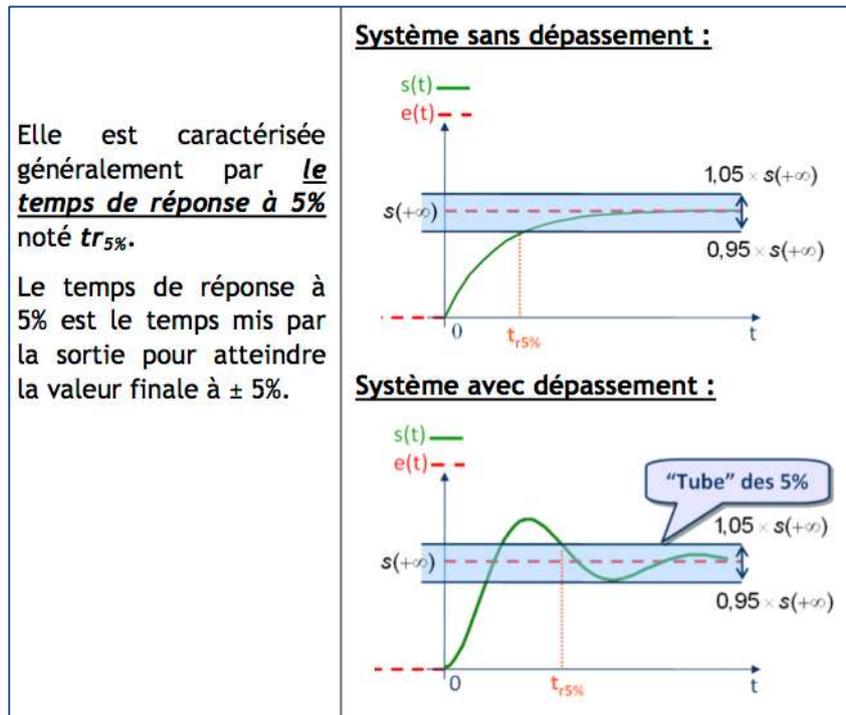
NB : Régime permanent (ou établi) : lorsque l'erreur entre l'entrée et la sortie n'évolue plus au cours du temps. Mathématiquement lorsque « t tend vers l'infini »



NB : l'erreur est appelée aussi écart

2.2. La rapidité caractérisée par le temps de réponse

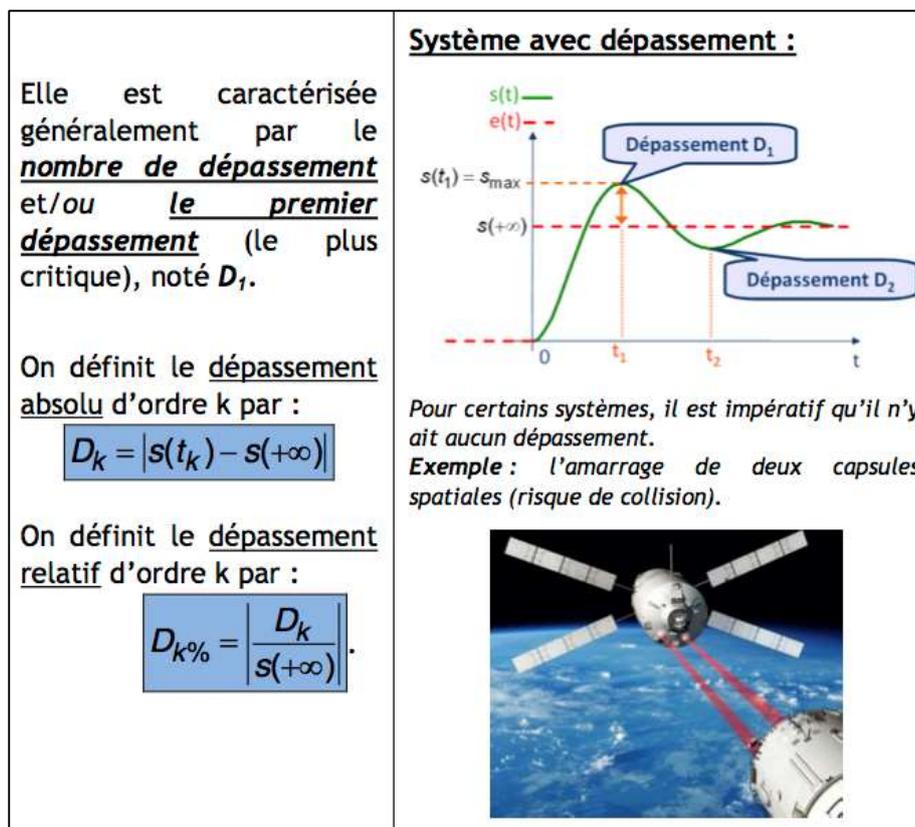
La rapidité est évaluée par le temps que met le système pour que la sortie atteigne sa valeur finale.



NB : Ce n'est pas le temps mis pour atteindre la valeur souhaitée (consigne) à $\pm 5\%$, mais bien la valeur finale. Il ne faut s'intéresser qu'à la courbe de sortie !

2.3. La stabilité caractérisée par les dépassements

La stabilité est évaluée, lorsque l'entrée est constante, par la capacité de la sortie à converger vers une valeur constante



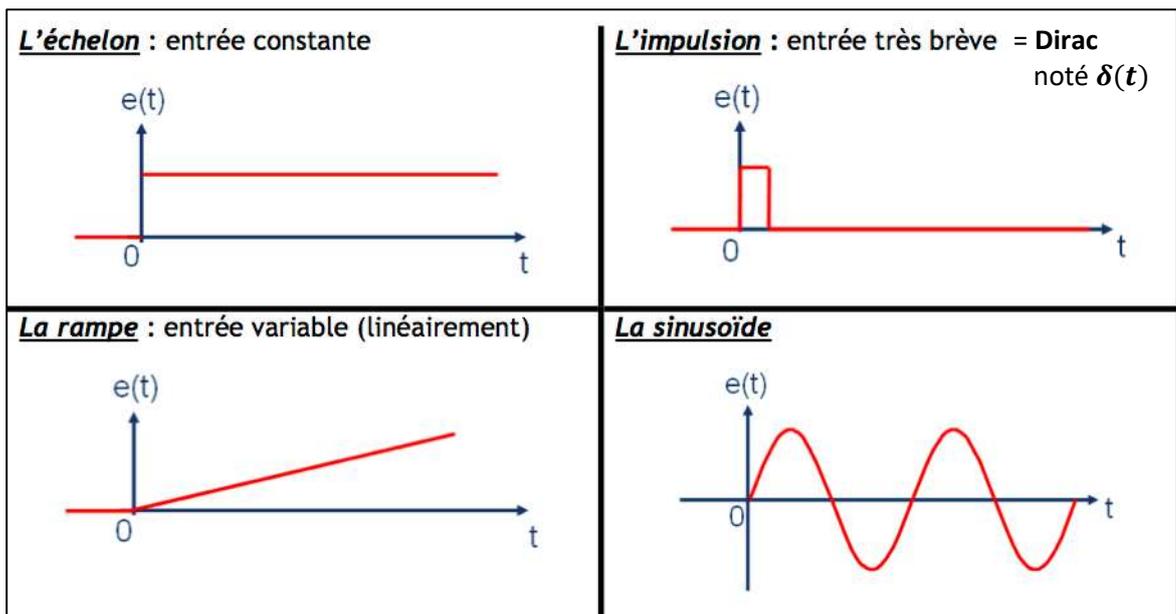


NB : ce ne sont pas les dépassements par rapport à la valeur souhaitée (consigne) mais bien par rapport à la valeur finale atteinte par la sortie. Ainsi, comme lorsque l'on évalue la rapidité, il faut faire abstraction de l'entrée lors d'une étude de stabilité !

2.4. Signaux test permettant d'évaluer les performances

Pour évaluer ces différents critères, il est nécessaire de **procéder à des tests**, soit sur le **système réel**, soit en **simulation**. Dans le cas d'une simulation, on modélise le système et les entrées qui peuvent lui être appliquées.

Il est impossible d'envisager tous les types d'entrées qui sont susceptibles d'être mises en œuvre par les utilisateurs du système. En pratique, on reconnaît **quatre types d'entrées** qui permettent de mieux connaître les réactions du système et donc ses **performances**.



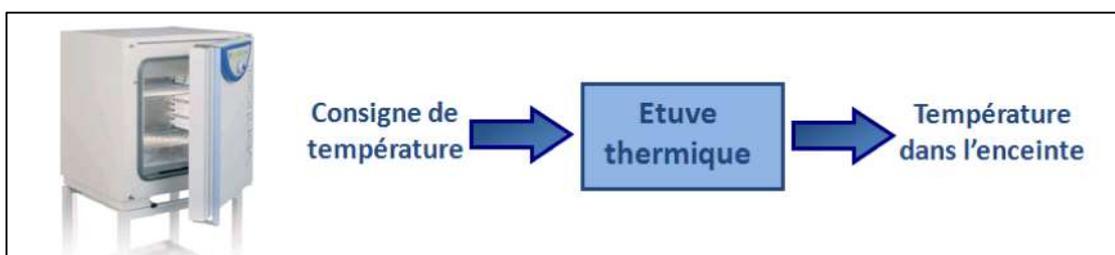
Une fois ces signaux test appliqués, l'objectif est d'obtenir, à l'aide de réglages, le meilleur compromis entre les différents critères de performances évoqués ci-dessus.

3. Modélisation des SLCI

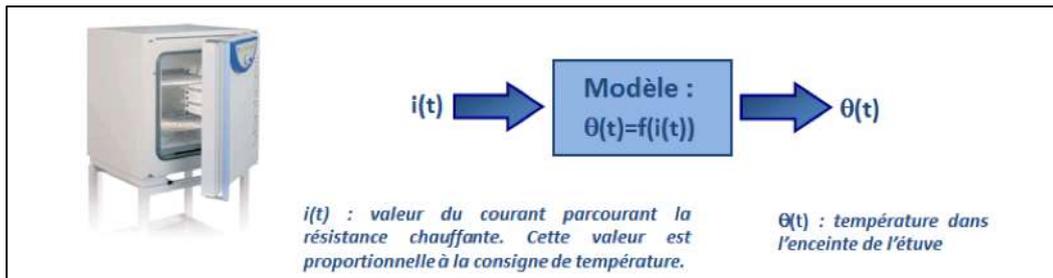
3.1. Consigne, réponse et modèles de connaissance et de comportement

Pour répondre correctement au besoin pour lequel il a été conçu, un système doit « produire » une **réponse** (sortie) qui respecte au mieux la **consigne** (entrée).

Exemple : **Étuve thermique**



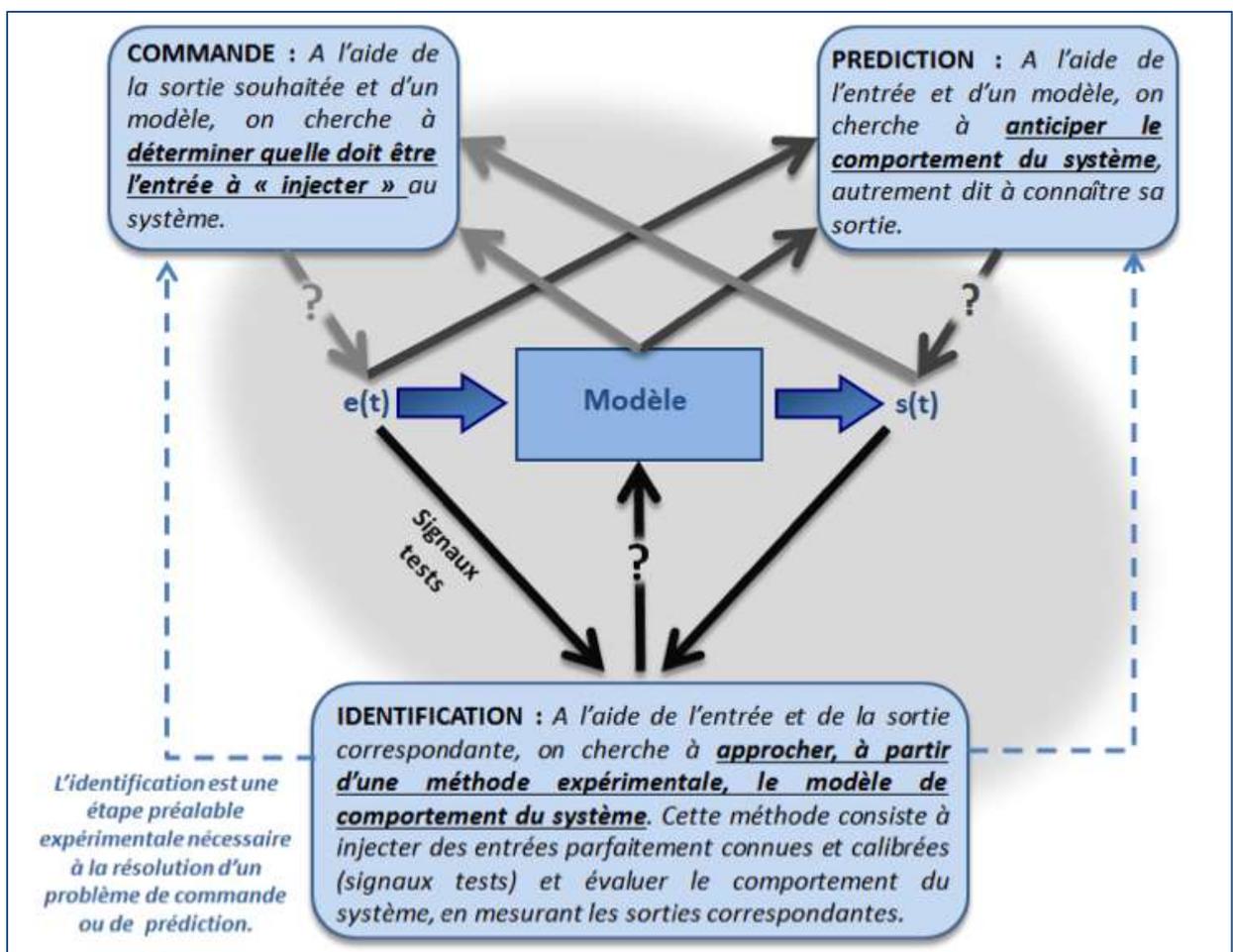
Les grandeurs d'entrée et de sortie sont liées entre elles par une loi physique, traduite par une équation mathématique plus ou moins complexe, qui est le **modèle** du système :



On parlera de **modèle de connaissance** lorsque le modèle est déterminé théoriquement à l'aide d'équations de la physique, et de **modèle de comportement** lorsque celui-ci est déterminé expérimentalement.

Étant donné que le **modèle** traduit la relation entre l'**entrée** et la **sortie**, la connaissance de deux d'entre eux doit permettre la détermination du troisième.

L'étude des systèmes continus peut donc conduire à rencontrer 3 types de problèmes :



3.2.Limites d'étude : Systèmes Linéaires, Continus et Invariants

Nous nous limiterons à l'étude des systèmes pour lesquels les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière **continue dans le temps**.

Nous ferons l'hypothèse que le modèle, qui traduit la manière dont se comporte le système, est **invariant**, c'est à dire qu'il reste identique et valable à chaque instant.

Enfin, nous restreindrons nos études au cas des systèmes **linéaires**, c'est à dire aux systèmes qui conservent à leur sortie toute combinaison linéaire des signaux d'entrée.

Dans la grande majorité des cas, le modèle de connaissance du système est alors une équation différentielle à coefficients constants de la forme :

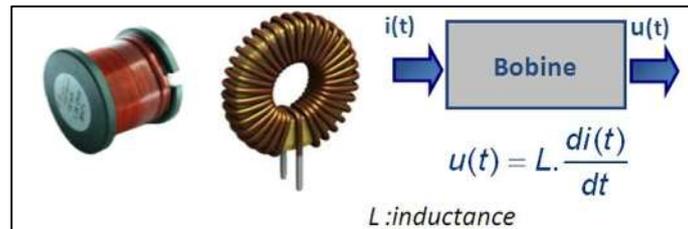
$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

$e(t)$: entrée et $s(t)$: sortie

Les systèmes réels étudiés impliquent $m \leq n$; n est appelé ordre du système

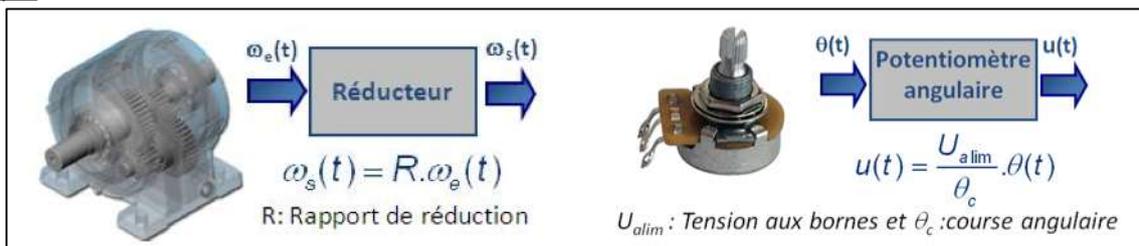
NB : on se limitera aux systèmes d'ordre 1 ou 2.

Exemple :



Dans certains cas, tels que des constituants élémentaires de systèmes, il existe simplement une relation de proportionnalité entre l'entrée et la sortie. Ce coefficient de proportionnalité sera appelé **gain** du constituant.

Exemple :



Lors de l'étude des Systèmes Linéaires Continus Invariants (SLCI), en particulier pour les problèmes de prédiction, on sera amené à manipuler et résoudre ces équations.

Même si les équations différentielles à coefficients constants (d'ordre 1 ou 2) figurent parmi les plus simples à appréhender, il est intéressant de disposer d'outils adaptés permettant d'effectuer rapidement et efficacement les études systématiques auxquelles nous allons être confrontés. Le plus efficace dans les cas que nous étudierons est **la transformation de Laplace**.

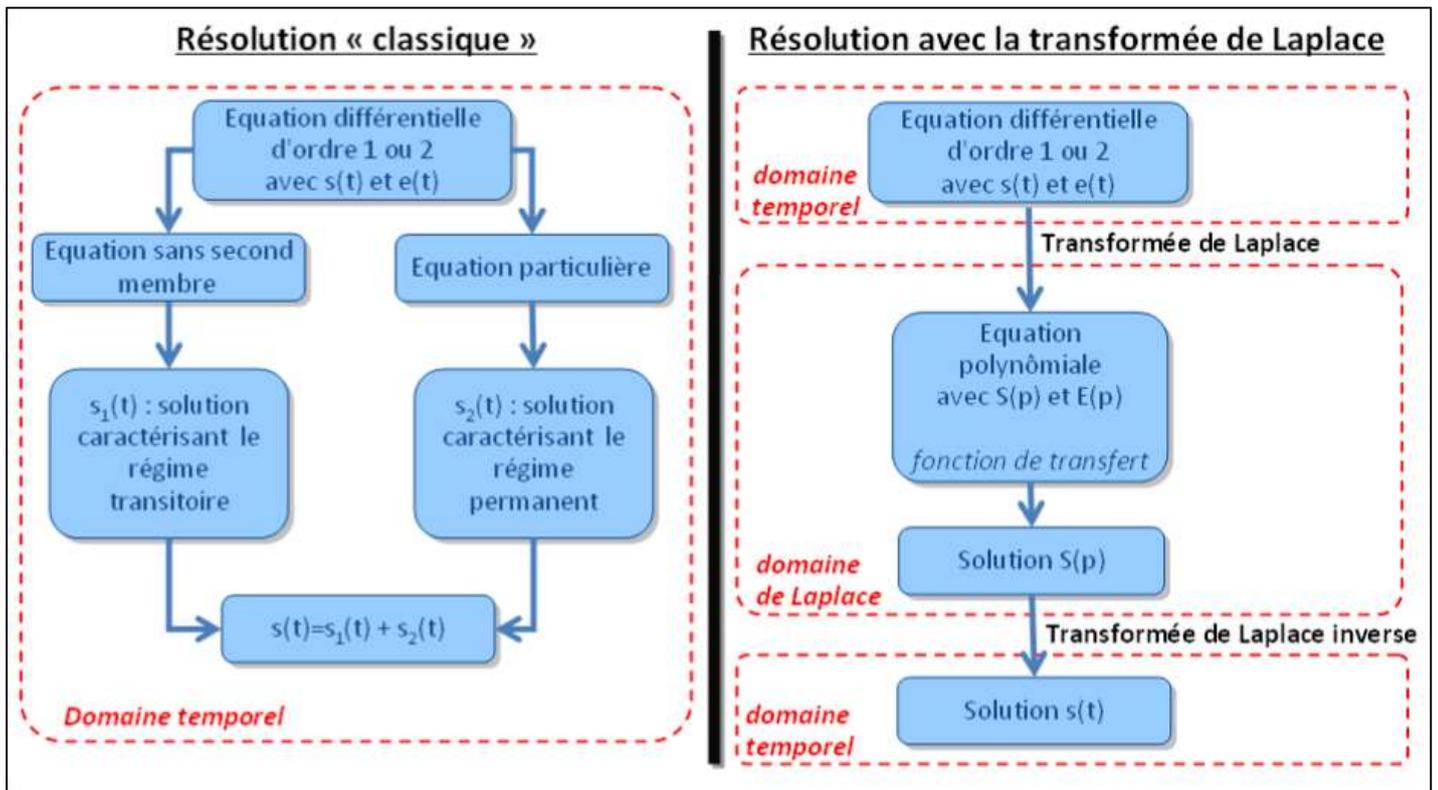
4. La transformation de Laplace

4.1. Définition et intérêt

Soit $f(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle telle que $f(t)=0$ pour $t<0$, on définit sa transformée de Laplace $L[f(t)]$ comme la fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$f(t) \xrightarrow{L[f(t)]} F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

La transformation de Laplace permet de transformer les équations différentielles en polynômes et de faciliter ainsi l'étude du comportement des SLCI.



4.2. Transformées de Laplace usuelles

Les transformées de Laplace des fonctions les plus fréquemment utilisées dans l'étude des SLCI sont à connaître par cœur :

$f(t)$	$\delta(t)$	1	t	e^{-at}	$t \cdot e^{-at}$	$e^{-at} \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$e^{-at} \cdot \sin(\omega \cdot t)$
$F(p)$	1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Attention : $L[f(t) \cdot g(t)]$ n'est pas égale à $L[f(t)] \cdot L[g(t)]$

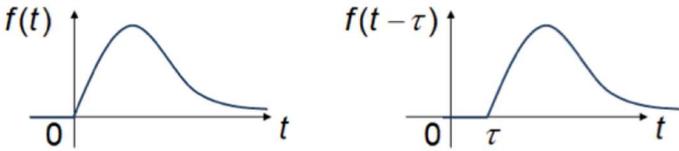
4.3. Propriétés et théorèmes

Les propriétés et théorèmes qui suivent sont fondamentaux car ils permettent de calculer facilement, sans utiliser la définition précédente, les transformées de Laplace de certains signaux. Ils sont donc à **connaître parfaitement**.

LINÉARITÉ	$L[\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)] = \alpha \cdot F(p) + \beta \cdot G(p)$	
DÉRIVATION	Dans les conditions de Heaviside (CI nulles)	$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n \cdot F(p)$
INTÉGRATION		$L\left[\int f(t) \cdot dt\right] = \frac{F(p)}{p}$

Exemple : Dans le cas où les conditions initiales sont nulles :

$$5 \cdot \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + 3 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} + 2 \cdot \theta(t) = v(t) \xrightarrow{L} 5 \cdot p^2 \cdot \theta(p) + 3 \cdot p \cdot \theta(p) + 2 \cdot \theta(p) = V(p)$$

THÉORÈME DE LA VALEUR INITIALE	Il permet de calculer, à partir de sa transformée de Laplace, la valeur de $f(t)$ au voisinage de zéro : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$
THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE	Il permet de calculer, à partir de sa transformée de Laplace, la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$
THÉORÈME DU RETARD	 <p>La transformée de Laplace de la fonction retardée d'un temps τ se déduit de la transformée de Laplace de la fonction non retardée grâce à la relation :</p> $L[f(t-\tau)] = F(p) \cdot e^{-\tau \cdot p}$

4.4. Transformée de Laplace inverse

Il est possible, à partir d'une fonction $F(p)$ de retrouver son « **original** », autrement dit, la fonction $f(t)$ dont elle est la transformée de Laplace :

$$F(p) \xrightarrow{L^{-1}[F(p)]} f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \cdot e^{-pt} \cdot dp$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante C .

En pratique, nous n'utiliserons jamais cette relation mais une méthode numérique (logiciel Scilab ou Matlab). Ou bien, lorsque cela est possible, on pourra utiliser le tableau des transformées de Laplace usuelles pour repasser dans le domaine temporel.

Cette méthode sera possible lorsque la fraction rationnelle $F(p)$ sera décomposée en éléments simples. (voir chapitre « Réponse temporelle des systèmes asservis »)

5. Représentation des SLCI : fonction de transfert

5.1. Existence d'une fonction de transfert seulement si les conditions initiales sont nulles Conditions de Heaviside

On a vu précédemment que le modèle traduisant la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ d'un SLCI était, dans la grande majorité des cas, une équation différentielle :

$$e(t) \rightarrow a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t) \rightarrow s(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de cette équation et **en considérant les conditions initiales nulles**, on a :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + \dots + a_1 \cdot p \cdot S(p) + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + \dots + b_1 \cdot p \cdot E(p) + b_0 \cdot E(p)$$

$$\left[a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0 \right] S(p) = \left[b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0 \right] E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\left[b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0 \right]}{\left[a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0 \right]} = \frac{\sum_0^m b_i \cdot p^i}{\sum_0^n a_i \cdot p^i}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de variable p est appelée **fonction de transfert** du système. Elle est notée :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad E(p) \rightarrow H(p) \rightarrow S(p)$$

Exemple : Moteur à courant continu

$$U(p) \rightarrow ? \rightarrow \Omega(p)$$



Équations fondamentales d'un Moteur à Courant Continu

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

$$e(t) = k_e \cdot \omega(t) \quad (2)$$

$$c(t) = k_c \cdot i(t) \quad (3)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = c(t) \quad (4)$$

$u(t)$: tension aux bornes du moteur

$i(t)$: intensité du courant du moteur

$\omega(t)$: vitesse de rotation du moteur

$c(t)$: couple du moteur

$e(t)$: f.e.m

J, k_e, k_c et L : caractéristiques du moteur

Dans le domaine de Laplace :

$$U(p) = E(p) + R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) \quad (1)$$

$$E(p) = k_e \cdot \Omega(p) \quad (2)$$

$$C(p) = k_c \cdot I(p) \quad (3)$$

$$J \cdot p \cdot \Omega(p) = C(p) \quad (4)$$

$$(3)+(4) \rightarrow I(p) = \frac{J \cdot p \cdot \Omega(p)}{k_c}$$

$$U(p) = \Omega(p) \left[k_e + \frac{R \cdot J}{k_c} p + \frac{L \cdot J}{k_c} p^2 \right]$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1}{k_e + \frac{R \cdot J}{k_c} p + \frac{L \cdot J}{k_c} p^2}$$

c' est la fonction de transfert du MCC

5.2. Forme canonique : gain statique, ordre et classe, pôles et zéros

La fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes qu'il est possible de factoriser :

z_i : « zéros » de la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \text{constante} \cdot \frac{(p-z_m) \cdot (p-z_{m-1}) \cdot \dots \cdot (p-z_1)}{(p-p_n) \cdot (p-p_{n-1}) \cdot \dots \cdot (p-p_1)}$$

p_i : « pôles » de la fonction de transfert

Les zéros et les pôles peuvent être complexes ou réels

On peut mettre la fonction de transfert sous sa forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + B_1 \cdot p + B_2 \cdot p^2 + \dots + B_m \cdot p^m}{1 + A_1 \cdot p + A_2 \cdot p^2 + \dots + A_{n-\alpha} \cdot p^{n-\alpha}}$$

avec : **K** : gain statique du système (son unité dépend de celles de l'entrée et de la sortie)

α : classe du système

n : ordre du système

NB : Lorsque $\alpha=1$ on dit que le système possède un intégrateur. Cela vient du fait que l'on peut écrire $H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{A(p)}{B(p)}$, $\frac{1}{p}$ étant la transformée de Laplace de l'intégrale.

Exemple : Moteur à courant continu

$$H(p) = \frac{1}{k_e + \frac{R \cdot J}{k_c} p + \frac{L \cdot J}{k_c} p^2} \xrightarrow{\text{forme canonique}} H(p) = \frac{1}{k_e} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{R \cdot J}{k_e \cdot k_c} p + \frac{L \cdot J}{k_e \cdot k_c} p^2\right)}$$

ordre : 2
classe : 0
gain statique : $\frac{1}{k_e}$

5.3. Forme canonique des systèmes d'ordre 1 et 2

Par convention, on écrira la fonction de transfert d'un **système d'ordre 1** sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Afin d'évaluer ses paramètres caractéristiques :

- **K** : gain statique
- τ : constante de temps en secondes

Par convention, on écrira la fonction de transfert d'un **système d'ordre 2** sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$$

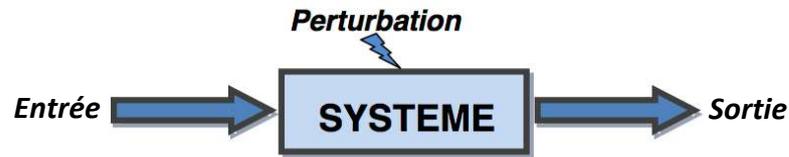
Afin d'évaluer ses paramètres caractéristiques :

- **K** : gain statique
- ξ : amortissement (sans unité, $\xi \geq 0$)
- ω_0 : pulsation propre en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

6. SLCI asservis

6.1. Insuffisance des systèmes en boucle ouverte (BO)

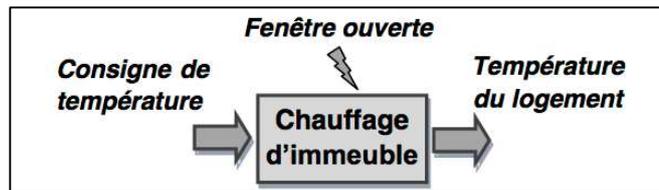
Un système continu peut, dans une première approche, être représenté de la façon suivante :



Un système non bouclé (en **boucle ouverte BO**) est un système qui ne contrôle pas la manière dont la consigne imposée en entrée a été respectée. Il ne prend pas en compte la réaction du système à une éventuelle cause externe qui pourrait modifier la relation entrée/sortie.

Un événement extérieur (**perturbation**) peut alors modifier la sortie attendue du système.

Exemple de perturbation :



Pour qu'un système réponde correctement aux besoins de l'utilisateur, il est important que la sortie ne varie pas quels que soient les phénomènes extérieurs qui pourraient la perturber.

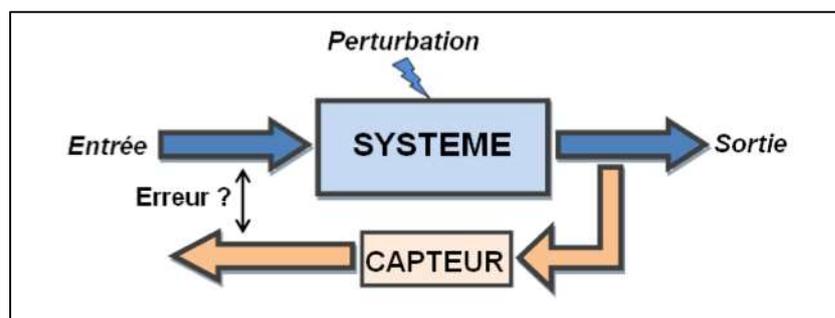
Exemple :

- vitesse de rotation d'un moteur électrique malgré les variations de l'effort (couple) résistant,
- cap d'un bateau malgré les vagues et le courant.

6.2. Les SLCI asservis ou en boucle fermée (BF)

Pour limiter l'influence de ces perturbations, il faut observer en permanence l'état de la sortie du système pour la modifier et la faire tendre vers la consigne donnée en entrée.

Un système bouclé (ou en **boucle fermée BF**) est un système dont **la sortie est mesurée puis comparée à l'entrée**. Cette différence est appelée « **erreur** » ou « **écart** ».



Le but d'un tel système est **d'annuler en permanence l'erreur entre l'entrée et la sortie**, c'est pour cette raison qu'il comporte toujours une **boucle de retour** comprenant un **capteur**.

On parle alors d'un « système asservi » mais c'est un abus de langage, **c'est la grandeur de sortie qui est asservie à la grandeur d'entrée**. Les qualités d'un tel système seront donc mesurées à partir de sa capacité à produire une sortie qui suit le mieux possible l'entrée.

6.3. Systèmes régulateurs ou systèmes suiveurs

On parle de **système régulateur** lorsque l'on désire que la sortie prenne une valeur précise et suive une consigne d'entrée fixe.



Étuve thermique



Système de régulation du niveau d'eau

On parle de **système suiveur** lorsque l'on désire que la sortie suive une consigne d'entrée qui varie au cours du temps et dont l'évolution n'est pas toujours connue à l'avance.



Missile à tête chercheuse

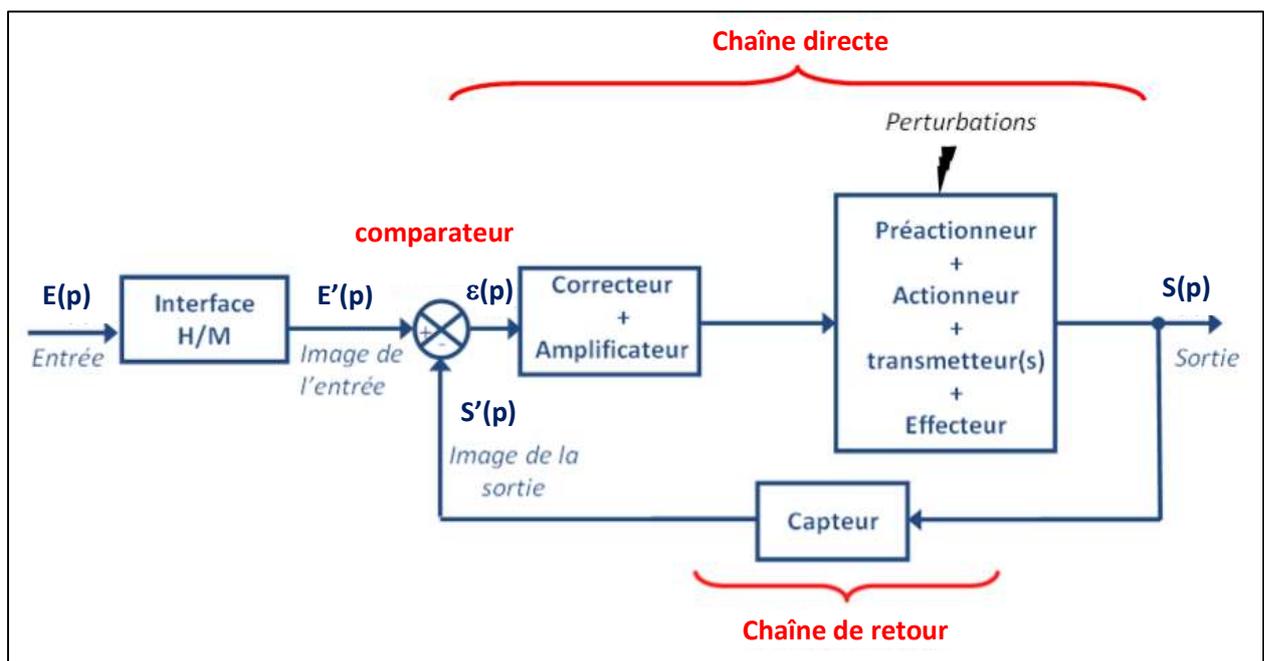


Segway

6.4. Structure et représentation d'un SLCI asservi : schéma-bloc

Notions de chaîne directe, chaîne de retour, comparateur, erreur et image de l'erreur

La structure complète d'un système asservi peut se représenter par le schéma-bloc fonctionnel suivant :



CONSTITUANT	FONCTION
Interface H/M	Traduire la consigne en un signal utilisable par la commande
Correcteur	Corriger le signal de commande pour améliorer les performances du système (précision - rapidité - stabilité)
Amplificateur	Amplifier le signal de commande
Capteur	Produire une image de la sortie
Comparateur	Comparer l'image de la sortie et l'image de l'entrée (consigne) Il délivre un signal $\varepsilon(t)$ (en général électrique) qui est une image de l'erreur $e_r(t)$. Avec : $\varepsilon(t) = e'(t) - s'(t)$ et $e_r(t) = e(t) - s(t)$

Le **capteur** mesure en permanence la grandeur de sortie du système (vitesse ou position ou température ou...). Cette image de la sortie est ensuite comparée à l'image de la consigne d'entrée issue de l'interface H/M afin de permettre à la partie commande d'apporter les corrections nécessaires.

Afin que le système soit correctement asservi et que $\varepsilon(t)$ soit bien une image de l'erreur $e_r(t)$ il faut :

$$\varepsilon(p) = 0 \quad \text{quand} \quad E(p) = S(p)$$

Cette condition permettra de régler le gain de l'IHM en fonction du gain du capteur (voir exercice 4 du TD3). (Interprétation : quand la sortie est « égale » à l'entrée, la chaîne directe n'est plus alimentée).

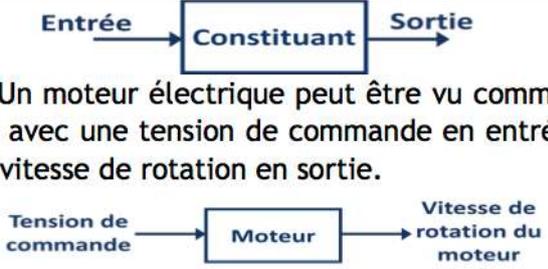
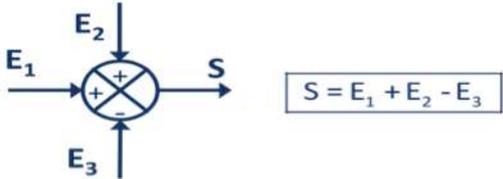
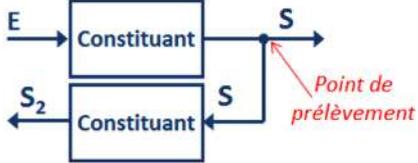
On peut remarquer que le système asservi est constitué de deux chaînes :

- la **chaîne directe** assurant les fonctions de commande et de puissance. On y retrouve certaines constituants de la chaîne d'énergie,
- la **chaîne de retour** assurant la fonction mesure. On y retrouve certaines composants de la chaîne d'information.

7. Manipulation de schémas-blocs

7.1. Éléments de base : bloc, comparateur et point de prélèvement

Un SLCI asservi peut être représenté par un schéma-bloc fonctionnel dont les trois éléments de base sont :

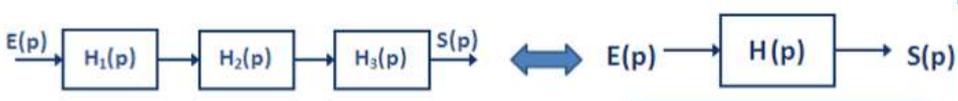
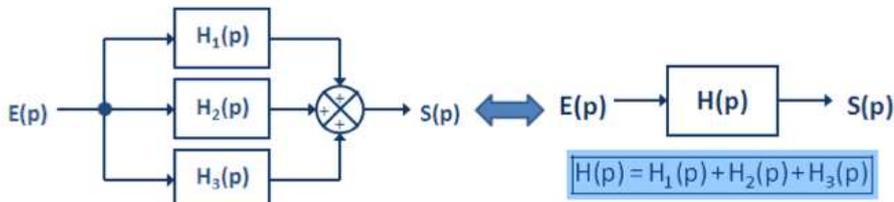
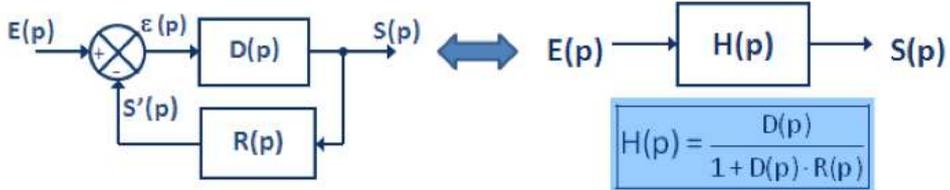
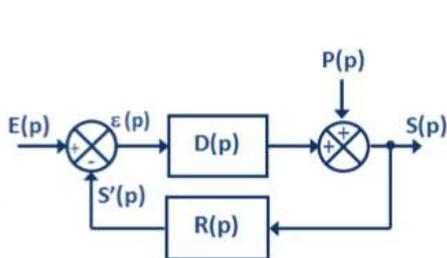
<p>Le bloc qui représente un constituant du système asservi (interface H/M, capteur, actionneur,...) ou sa fonction de transfert⁽¹⁾. Ce bloc comporte une seule entrée et une seule sortie.</p>	 <p>Ex: Un moteur électrique peut être vu comme un bloc avec une tension de commande en entrée et une vitesse de rotation en sortie.</p>
<p>Le comparateur (soustracteur ou sommateur) qui comporte plusieurs entrées mais une seule sortie. Ces entrées peuvent être additionnées ou soustraites.</p>	 <p>$S = E_1 + E_2 - E_3$</p>
<p>Le point de prélèvement qui prélève, sans le modifier, le signal en un point.</p>	 <p>Point de prélèvement</p>

NB : pour pouvoir être comparés, les signaux qui arrivent au comparateur doivent être de même nature.

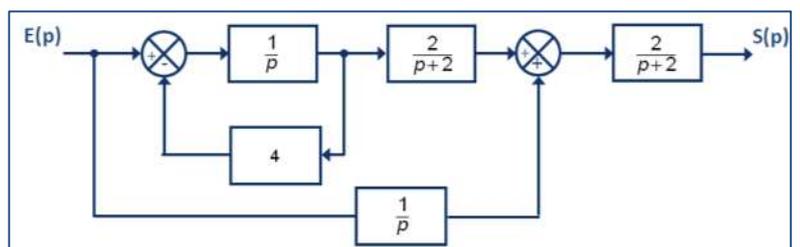
7.2. Simplification de schémas-blocs élémentaires

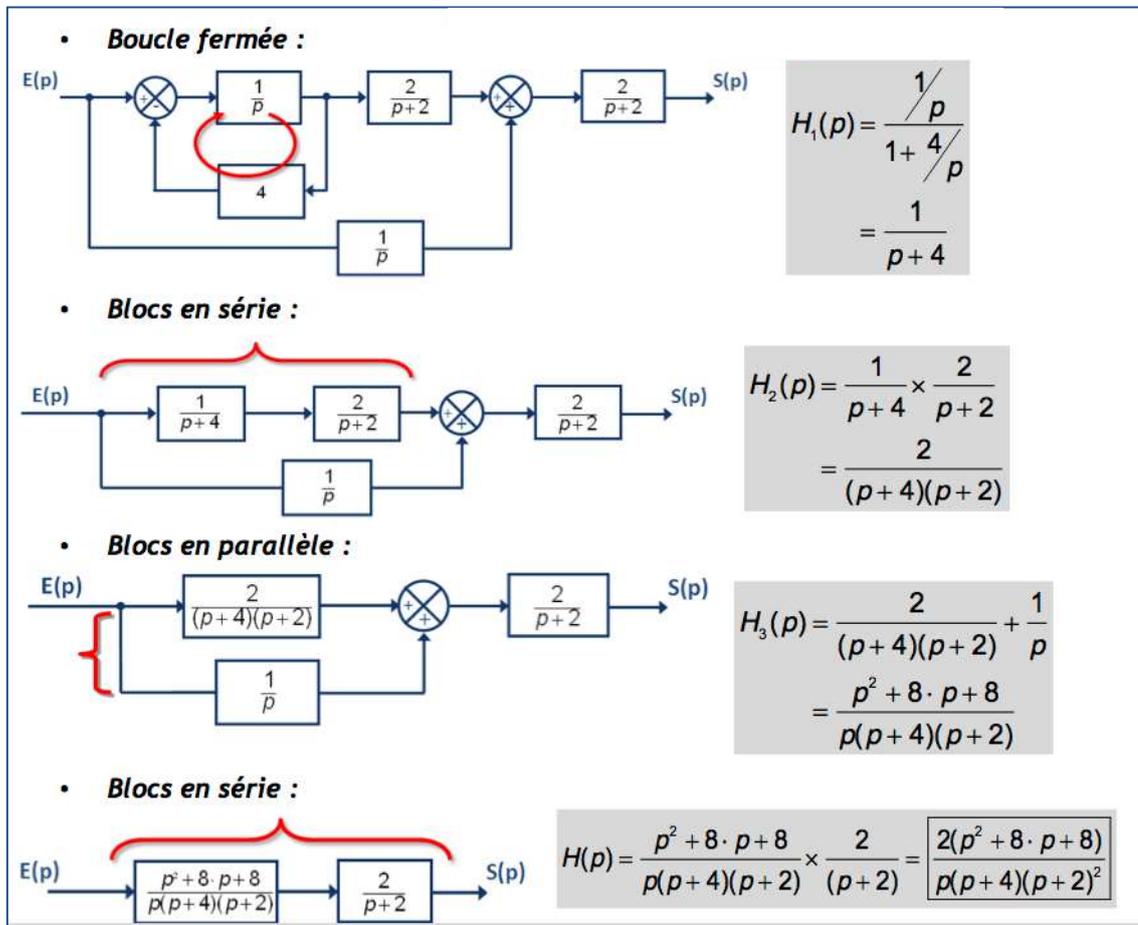
Pour étudier ou prévoir le comportement d'un SLCI asservi, il est nécessaire de connaître sa fonction de transfert globale.

Celle-ci est obtenue à partir des différentes fonctions de transfert de chacun de ses constituants. Il est donc indispensable de connaître les règles d'association et de simplification des schémas-blocs.

<p>Fonction de transfert de blocs en série</p>	 <p style="text-align: center;">$H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times H_3(p)$</p> <p style="text-align: center;"><i>La fonction de transfert équivalente de blocs en série est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des blocs.</i></p>
<p>Fonction de transfert de blocs en parallèle</p>	 <p style="text-align: center;">$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$</p> <p style="text-align: center;"><i>La fonction de transfert équivalente de blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert de chacun des blocs.</i></p>
<p>Fonction de transfert de blocs en boucle fermée : FTBF</p>	 <p style="text-align: center;">$H(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p) \cdot R(p)}$</p> <p style="text-align: center;"><i>D(p) : FT de la chaîne directe R(p) : FT de la chaîne de retour</i></p> <p>Démonstration :</p> $S(p) = D(p) \cdot \varepsilon(p) \quad \left \quad S(p) = D(p) \cdot [E(p) - R(p) \cdot S(p)]\right.$ $S(p) = D(p) \cdot [E(p) - S'(p)] \quad \left \quad S(p) \cdot [1 + R(p) \cdot D(p)] = D(p) \cdot E(p)\right.$
<p>Principe de superposition</p>	 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $H_2(p) = \frac{S(p)}{P(p)} \text{ avec } E(p) = 0$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ avec } P(p) = 0$ </div> <p style="text-align: center;">$S(p) = H_1(p) \times E(p) + H_2(p) \times P(p)$</p> <p style="text-align: center;"><i>La sortie du système est obtenue en additionnant les sorties obtenues en mettant les différentes entrées nulles une à une</i></p>

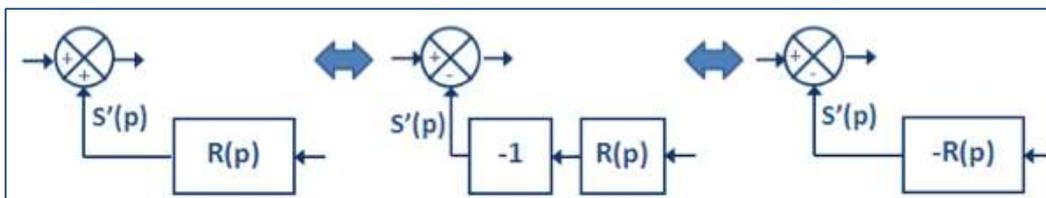
Exemple : On cherche à déterminer la fonction de transfert du système représenté par le schéma-bloc ci-contre :



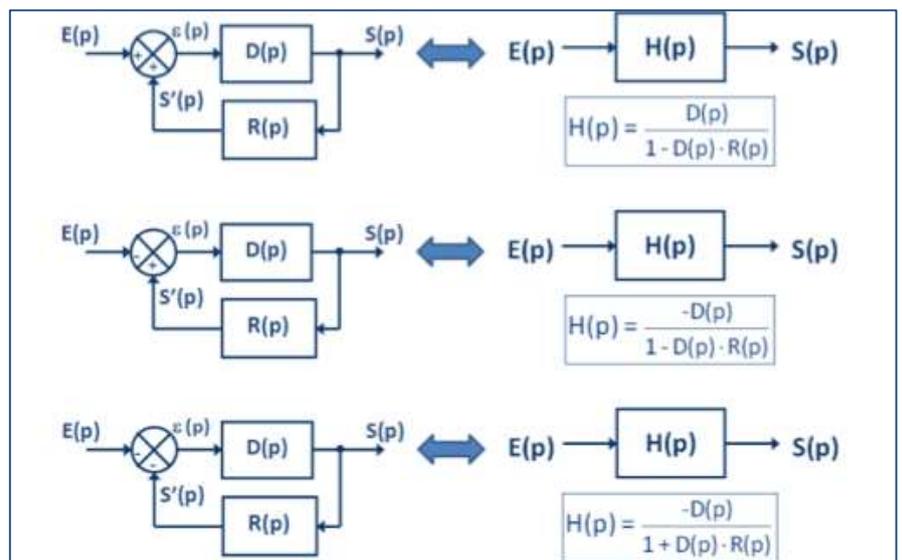


Lorsque l'on travaille sur un schéma-bloc, il faut bien faire attention aux signes des comparateurs (sommateur ou soustracteur) et adapter les règles vues précédemment !

Il ne faut pas hésiter à affecter un signe « - » à certains blocs pour retrouver les règles du cours :



Exemples pour la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :



7.3. Simplification de schémas-blocs avec boucles imbriquées

L'objectif est d'isoler les boucles en déplaçant des blocs et en **faisant en sorte que 2 comparateurs soient côte à côte afin de les permuter**.

Les manipulations suivantes ne sont à effectuer que lorsque la présence de boucles imbriquées est constatée.

Déplacement d'un bloc après un point de prélèvement	
Déplacement d'un bloc avant un point de prélèvement	
Déplacement d'un bloc après un comparateur	<p> $S(p) = E_1(p) \times H(p) + E_2(p)$ $S(p) = \left(E_1(p) + E_2(p) \times \frac{1}{H(p)} \right) \times H(p) = E_1(p) \times H(p) + E_2(p)$ </p>
Déplacement d'un bloc avant un comparateur	<p> $S(p) = (E_1(p) + E_2(p)) \times H(p)$ $S(p) = E_1(p) \times H(p) + E_2(p) \times H(p) = (E_1(p) + E_2(p)) \times H(p)$ </p>
Permutation de 2 sommateurs ⁽¹⁾	

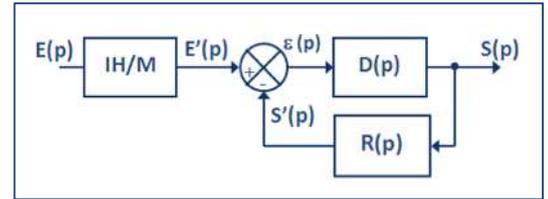
(1) : on utilisera cette règle pour « désimbriquer » des boucles dans un schéma-bloc

8. Détermination de l'erreur e_r

La performance de précision d'un SLCI est évaluée, une fois que le régime permanent est atteint, par l'erreur (ou écart) entre la consigne d'entrée et la sortie.

Bien que cette erreur $e_r(t)$ soit en général **facile à déterminer lorsque l'on connaît les caractéristiques des réponses temporelles des systèmes rencontrés fréquemment**, il est parfois nécessaire de la calculer.

Cela peut être réalisé :



A partir de la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ (lorsque celle-ci est déjà connue)

Pour cela on procède de la façon suivante :

➔ Calculer l'erreur $E_r(p)$ dans le domaine de Laplace

$$E_r(p) = E(p) - S(p) = E(p) - E(p) \cdot H(p) = E(p) \cdot (1 - H(p))$$

➔ Calculer la transformée de Laplace de l'entrée $E(p)$ du système

$$E(p) = \frac{E_0}{p} \text{ si } e(t) = E_0 \text{ (échelon) } \quad \text{ou} \quad E(p) = \frac{a}{p^2} \text{ si } e(t) = a \cdot t \text{ (rampe)}$$

➔ Calculer l'erreur $e_r(+\infty)$ dans le domaine temporel

En utilisant le théorème de la valeur finale :

$$e_r(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_r(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot E_r(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot E(p) \cdot (1 - H(p))]$$

Il ne faut pas hésiter à mettre $(1 - H(p))$ au même dénominateur pour lever l'indétermination lors du calcul de la limite.

A partir de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte⁽²⁾ (lorsque $H(p)$ n'est pas connue)

Pour cela on procède de la façon suivante :

➔ Calculer l'image de l'erreur $\varepsilon(p)$ dans le domaine de Laplace

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= E'(p) - S'(p) \\ \varepsilon(p) &= E'(p) - D(p) \cdot R(p) \cdot \varepsilon(p) \text{ donc} \\ \varepsilon(p) \cdot [1 + D(p) \cdot R(p)] &= E'(p) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E'(p)}{1 + D(p) \cdot R(p)} \quad \text{ou} \quad \varepsilon(p) = \frac{E'(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Avec $FTBO(p) = D(p) \cdot R(p)$ appelé Fonction de Transfert en Boucle Ouverte.

➔ Calculer la transformée de Laplace de l'image de l'entrée $E'(p)$ du système

$$E'(p) = \frac{E_0}{p} \text{ si } e'(t) = E_0 \text{ (échelon) } \quad \text{ou} \quad E'(p) = \frac{a}{p^2} \text{ si } e'(t) = a \cdot t \text{ (rampe).}$$

➔ Calculer l'image de l'erreur $\varepsilon(+\infty)$ dans le domaine temporel

$$\text{En utilisant le théorème de la valeur finale : } \varepsilon(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \varepsilon(p)]$$

➔ En déduire l'erreur $e_r(+\infty)$ dans le domaine temporel

En utilisant la relation de proportionnalité entre l'entrée, la sortie et leurs images en entrée du comparateur.

⁽²⁾ : attention, la FTBO n'est pas la fonction de transfert du système s'il était en BO, c'est à dire s'il n'y avait pas de chaîne de retour avec un capteur !

Attention : Cela est sans gravité lorsqu'elle est nulle, mais il y a souvent une confusion entre l'erreur $e_r(t)$ et son image en sortie du comparateur $\varepsilon(t)$. De même, l'image de l'entrée $e'(t)$ est souvent appelée « entrée ».