Modéliser les Mouvements dans les Systèmes

Graphe des Liaisons / Schéma Cinématique / Loi Entrée-Sortie

MP2I / PCSI

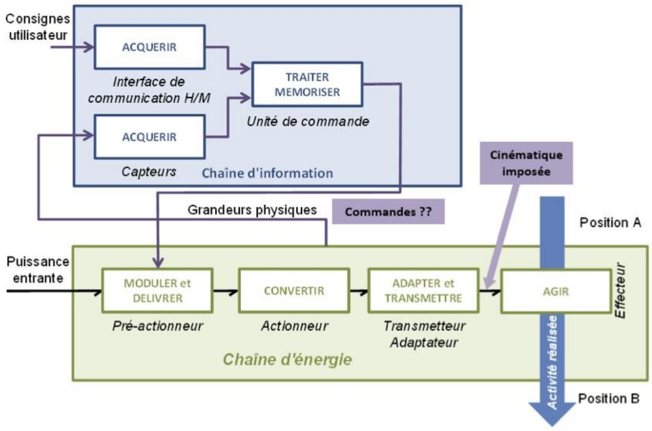
L'objectif de ce cours est de découvrir les démarches et méthodes permettant de décrire et de représenter <u>les mouvements des solides</u> d'un mécanisme.

Pourquoi ?

Robot chirurgien Da Vinci

*Pour de nombreux systèmes, en particulier pour ceux du domaine de la robotique industrielle, un des principaux enjeux de leur concepteur est de faire en sorte qu'ils respectent parfaitement la **cinématique** imposée par leur cahier des charges.*

*Il s'agit alors de s'assurer que les **mouvements** des pièces qui les constituent s'exécutent parfaitement suivant des **courses** et à des **vitesses maitrisées**.*



*La parfaite connaissance de cette cinématique permettra ensuite de déterminer les **lois de commande des actionneurs** qui permettront de la réaliser.*

1. Modélisation des solides d'un mécanisme

Un mécanisme, par exemple un système de transformation de mouvement (transmetteur-adaptateur), est constitué d'un certain nombre de pièces.

<u>**Hypothèse**</u> : ces pièces sont considérées indéformables. On parlera alors de **solides indéformables**.

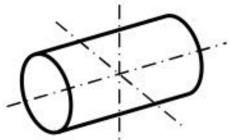
<u>Conséquence</u> : il sera possible de **lier un repère au solide étudié**. Dans ce cas, la position d'un point du solide étudié est fixe dans ce repère. **On parlera alors indépendamment d'un solide ou de son repère associé**.

Les différents **solides** d'un mécanisme **sont en contact** : contact <u>direct</u> ou contact <u>par éléments interposés</u> (éléments de guidage).

Dans le cas des contacts directs, on parlera de **surfaces élémentaires en contact permettant de définir une liaison simple** (ou liaison usuelle) entre ces deux solides :

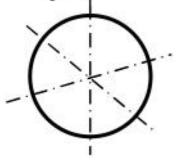
<u>Les surfaces élémentaires</u> :

Le cylindre de révolution
Modèle : cylindricité parfaite (circularité du profil et rectitude), état de surface parfait, diamètre et longueur sans tolérance

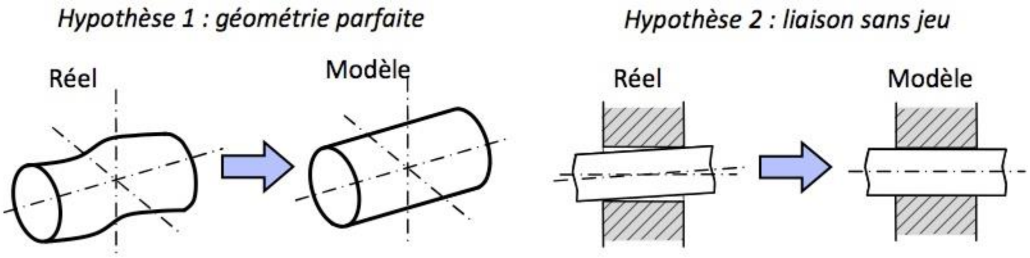


Le plan
Modèle : planéité, rugosité et dimensions parfaites

La sphère
Modèle : rugosité, dimensions parfaites

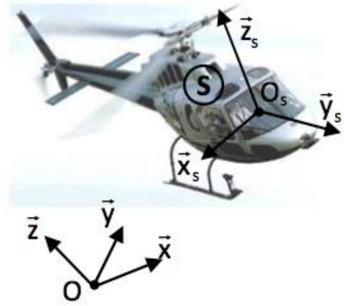


Les modèles de liaisons sont alors basés sur deux hypothèses fondamentales :



2. Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère

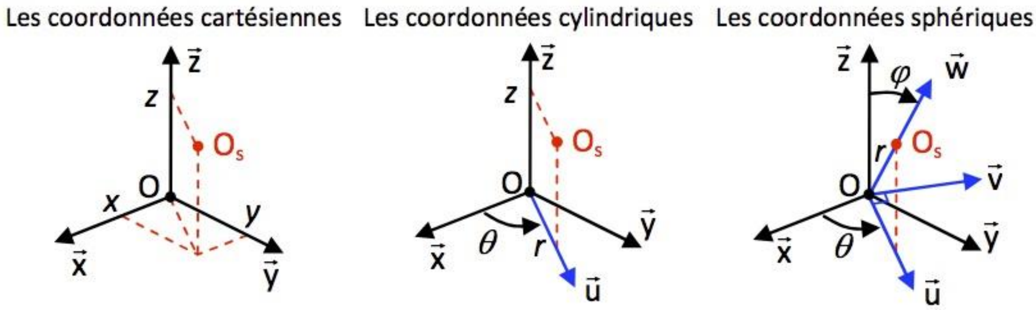
Pour définir la position d'un solide (S) par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, il faut d'abord commencer par lier à ce solide un repère $R_S(O_S,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ et ensuite définir la position du repère R_S par rapport au repère R.



Le repère R_S étant caractérisé par son origine O_S et sa base $(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$, il faut d'abord définir la position de l'origine O_S dans R puis l'orientation de la base $(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ de R_S par rapport à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de R.

2.1. Paramétrage de la position de O_S dans R

On utilise usuellement 3 types de coordonnées pour définir la position de O_S dans le repère R :



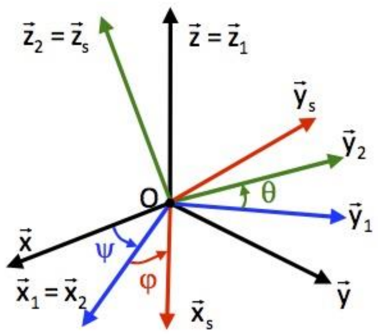
2.2. Paramétrage de l'orientation de la base de R_S par rapport à la base de R

Il existe d'autres solutions mais on utilise dans le cas général un paramétrage par les angles d'Euler. Ils correspondent à trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ avec la base $(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$:

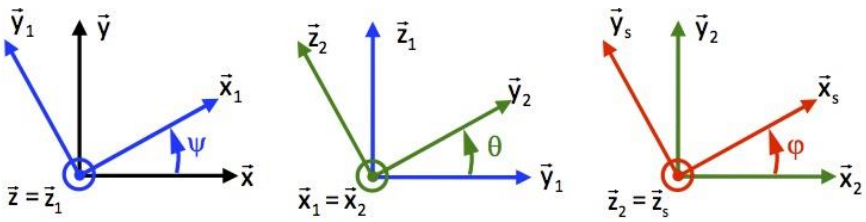
1ère rotation : <u>d'angle ψ autour de l'axe $(O,\vec{z})$</u> permettant de passer de la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ à la base intermédiaire $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$.
$\boldsymbol{\psi}$ est appelé **angle de précession**.

2ème rotation : <u>d'angle θ autour de l'axe $(O,\vec{x}_1)$</u> permettant de passer de la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ à la seconde base intermédiaire $(\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.
$\boldsymbol{\theta}$ est appelé **angle de nutation**.

3ème rotation : <u>d'angle φ autour de l'axe $(O,\vec{z}_2)$</u> permettant de passer de la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ à la base $(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$.
$\boldsymbol{\varphi}$ est appelé **angle de rotation propre**.



Les figures planes (ou figures géométrales) sont très utiles pour la résolution des problèmes. Elles permettent de poser dans un plan toutes les rotations.
Ici :



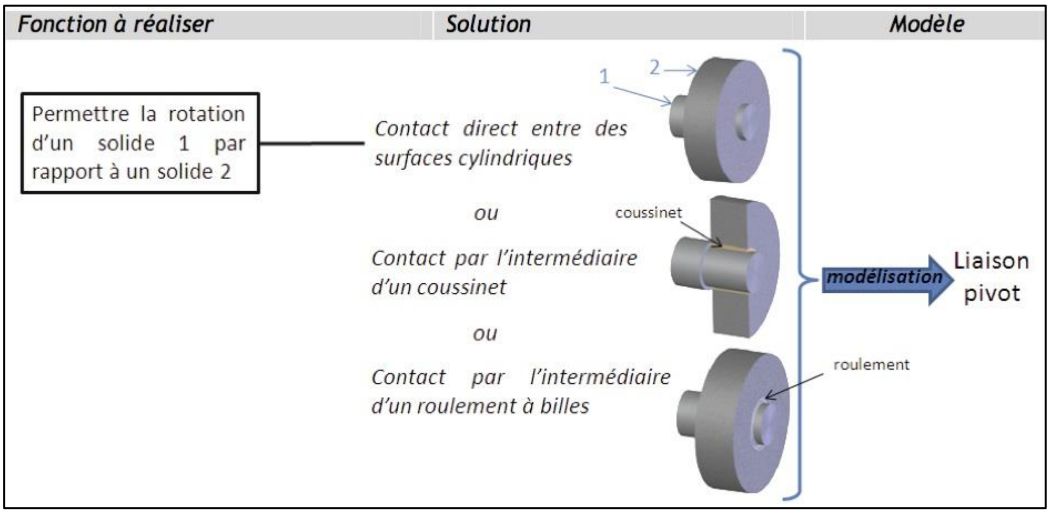
Voir vidéo sur le site :

3. Les liaisons entre deux solides en contact

Une liaison est un **modèle du comportement cinématique** d'un solide par rapport à un autre.

Elle permet de **définir les possibilités de mouvement entre deux solides en contact** (contact direct ou par l'intermédiaire d'éléments de guidage : roulements, coussinets, …) indépendamment de sa réalisation matérielle. Ce qui signifie que différentes solutions technologiques peuvent conduire au même comportement cinématique donc à **la même liaison**.

Illustration :

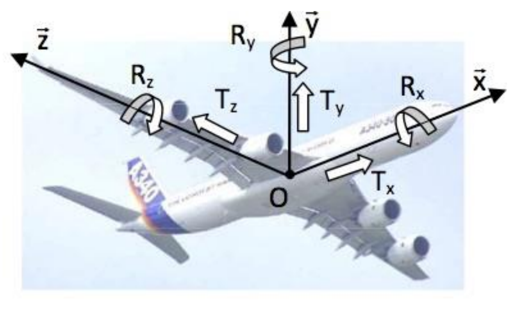


D'après le paragraphe 2, il faut donc 6 paramètres pour positionner un solide dans l'espace :

- **3 paramètres linéaires** notés **T_X, T_Y et T_Z** (homogènes à une **longueur [m]**) permettant de positionner l'origine O_S du repère lié à ce solide,
- **3 paramètres angulaires** notés **R_X, R_Y et R_Z** (homogène à un **angle [rad]**) permettant d'orienter la base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ du repère lié à ce solide.

On dit qu'un solide possède 6 degrés de liberté dans l'espace : 3 translations (T_X, T_Y et T_Z) et 3 rotations (R_X, R_Y et R_Z) :

3 degrés de liberté en translation	**T_x** = liberté de mouvement de translation rectiligne de direction $\vec{x}$
	T_y = liberté de mouvement de translation rectiligne de direction $\vec{y}$
	T_z = liberté de mouvement de translation rectiligne de direction $\vec{z}$
3 degrés de liberté en rotation	**R_x** = liberté de mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{x})$
	R_y = liberté de mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{y})$
	R_z = liberté de mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z})$



Les liaisons entre 2 solides en contact permettent alors de supprimer un certain nombre de degrés de liberté pour assurer une fonction, par exemple permettre la seule rotation du solide S_2 par rapport au solide S_1 autour d'un axe particulier.

3.1. Degrés de liberté d'une liaison usuelle

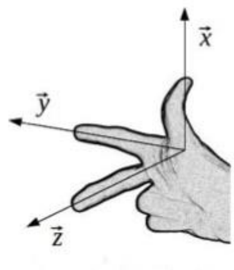
On appelle **degrés de liberté** d'une liaison, chacun des **mouvements relatifs élémentaires indépendants** autorisés par cette liaison.

Ils correspondent aux rotations et translations relatives suivant les axes du <u>repère local</u> $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à la liaison.

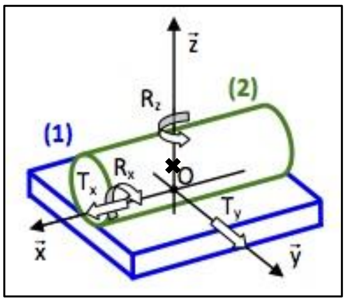
<u>L'origine de ce repère local</u> est choisie pour être <u>confondue avec un point caractéristique de la liaison</u>, en général le centre géométrique des surfaces en contact.

<u>Les vecteurs directeurs de la base de ce repère local</u> sont tels que :

- l'un des vecteurs est toujours porté par l'axe de symétrie ou par la normale au plan tangent commun : c'est la direction caractéristique de la liaison,
- si une seconde direction privilégiée existe, elle est repérée par un second vecteur de la base.
- Dans tous les cas, la base du repère local est **orthonormée directe** :



Le **nombre de degrés de liberté** entre deux solides correspond alors au **nombre de paramètres de mouvements indépendants** à définir pour caractériser le mouvement relatif entre ces deux solides.



<u>Exemple</u> : **Liaison entre un cylindre et un plan** :

Il existe 4 degrés de liberté : **Tx**, **Ty**, **Rx** et **Rz**.

Il faudra donc utiliser 4 paramètres de mouvements pour caractériser les mouvements relatifs de (2) par rapport à (1).

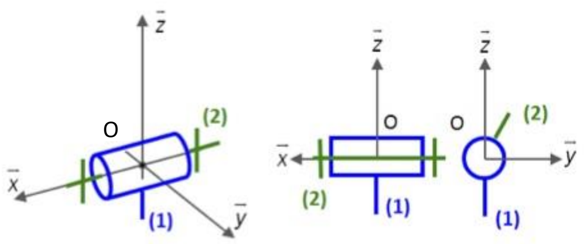
Par exemple : **x(t)** (pour T_X)**, y(t)** (pour T_Y)**, α(t)** (pour R_X) et **β(t)** (pour R_Z).

3.2. Liaisons usuelles

Les mouvements relatifs entre deux solides en contact les plus souvent rencontrés dans les systèmes réels sont donc modélisés par **les liaisons dites « usuelles »**.

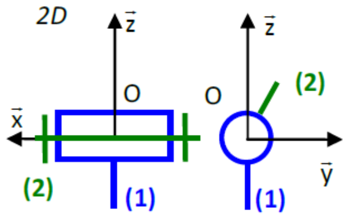
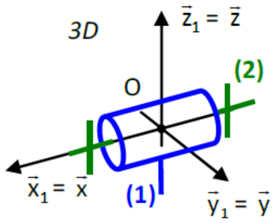
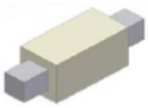
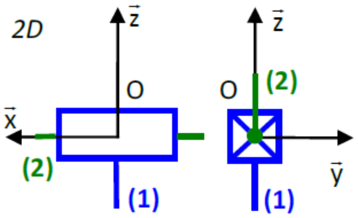
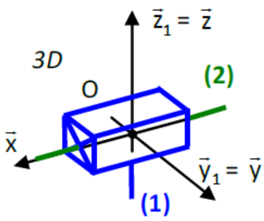
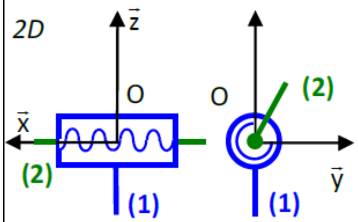
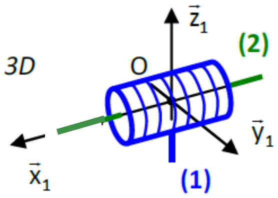
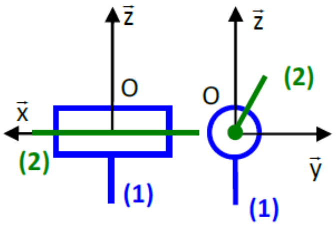
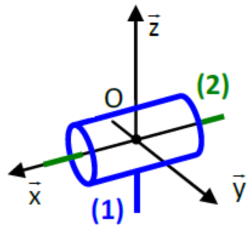
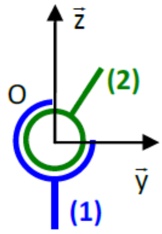
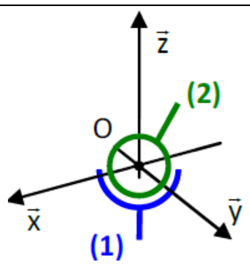
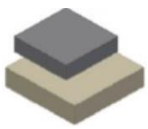
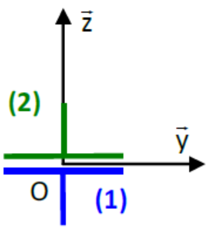
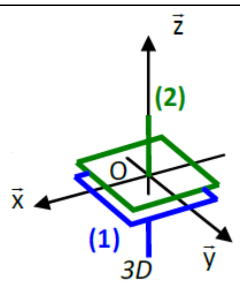
Pour chacune d'entre elles, on associe :

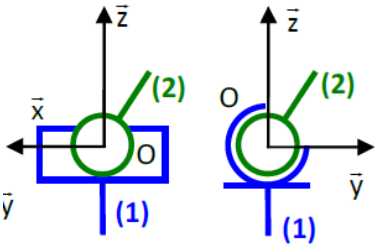
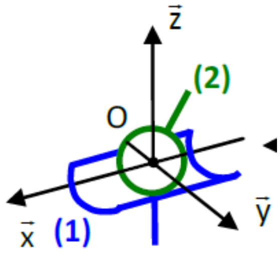
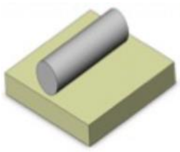
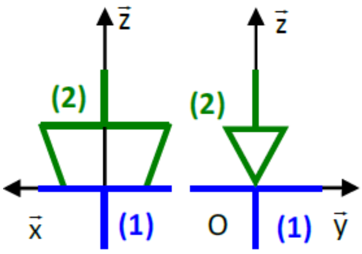
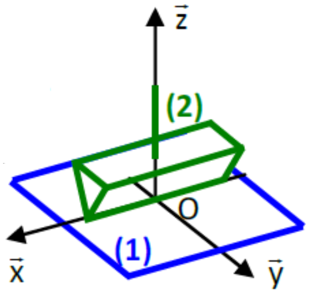
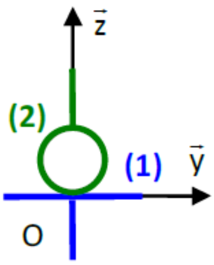
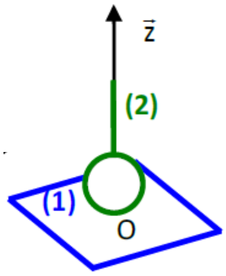
- le **nom** et la **description géométrique** : ex : liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$,
- les **symboles** de représentation 2D et 3D :
- le **nombre de degrés de liberté**, ici 1 : <u>Rx</u>,



Symbole 3D *Symbole 2D*

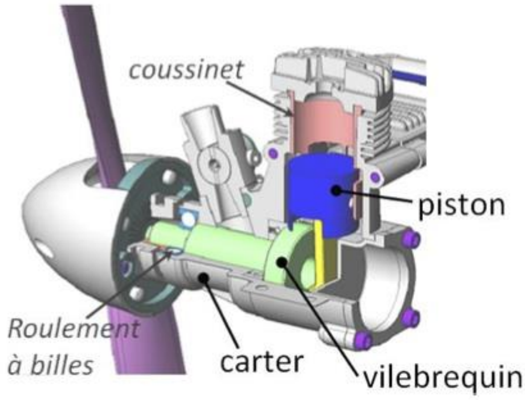
LIAISONS USUELLES - Normes NF E 04-014 et NF EN ISO 3952-1

Degrés de liberté	Nom de la liaison	Schématisation		Caractéristiques géométriques
		2D	3D	
0 T 1 R	**Pivot** 			Axe $(O,\vec{x})$
1 T 0 R	**Glissière** 			Direction $\vec{x}$
1 (R+T)	**Hélicoïdale** 			Axe $(O,\vec{x})$
1 T 1 R	**Pivot Glissant** 			Axe $(O,\vec{x})$
0 T 3 R	**Rotule** ou **Sphérique** 			Centre O
2 T 1 R	**Appui Plan** 			Normale $\vec{z}$

Degrés de liberté	Nom de la liaison	Schématisation 2D	Schématisation 3D	Caractéristiques géométriques
1 T 3 R	**Linéaire Annulaire**  (sphère-cylindre)			Axe $(O, \vec{x})$
2 T 2 R	**Linéaire Rectiligne**  (cylindre-plan)			• Axe $(O, \vec{x})$ • Normale $\vec{z}$
2 T 3 R	**Ponctuelle**  (sphère-plan)			• Point de contact O • Normale $\vec{z}$

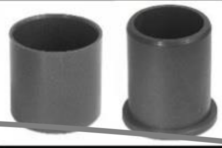
4. Les contacts par éléments interposés

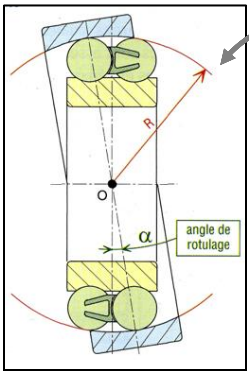
Ce sont **les contacts entres les solides**, observés sur le système réel, **qui permettent d'identifier les mouvements relatifs** avec comme objectif d'associer à chacune des situations rencontrées un modèle de comportement cinématique **et donc une <u>liaison usuelle</u>**.



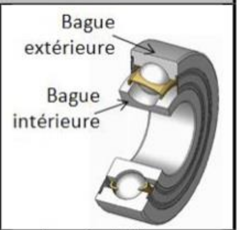
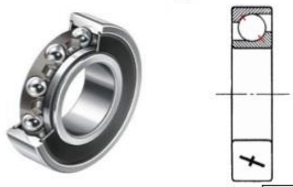
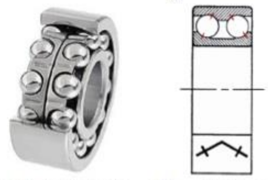
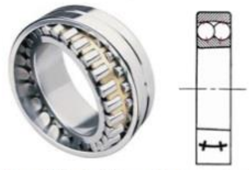
Micro-moteur thermique d'aéromodélisme

Grâce à **l'interposition d'éléments glissants** ou **roulants** entre les solides, il est cependant possible d'obtenir des mouvements relatifs plus performants d'un point de vue énergétique (moins de frottements donc meilleur rendement). L'utilisation de ces solutions techniques permet aussi aux concepteurs des systèmes d'obtenir facilement les mouvements relatifs recherchés.

Coussinets	
	Ils permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison **pivot** ou **pivot glissant**



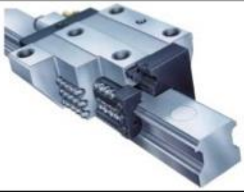
Il existe toujours un jeu, aussi minime soit-il, entre les billes et les bagues. Ce jeu a pour conséquence de permettre une rotation relative des bagues autour des axes perpendiculaires à l'axe de rotation principal du roulement.

Roulements	
En fonction de la valeur de l'angle maximal de rotulage fourni par le constructeur, on peut considérer que le mouvement relatif entre la bague extérieure et la bague intérieure peut être modélisé par une liaison pivot ou une liaison sphérique. **Si l'angle maximal de rotulage est >5', on peut considérer que les degrés de liberté de rotation autour des axes secondaires ne sont pas supprimés.**	
Roulement à une rangée de billes  En général, rotulage > 5' $\Rightarrow$ liaison **sphérique**	Roulement à deux rangées de billes  En général, rotulage < 5' $\Rightarrow$ liaison **pivot**
Roulement à aiguilles ou à rouleaux  Rotulage toujours < 5' $\Rightarrow$ liaison **pivot**	Roulement à rotule (billes ou rouleaux)  Rotulage entre 2° et 4° $\Rightarrow$ liaison **sphérique**

<u>Quelques exemples d'autres éléments de guidage</u> :

Douilles à billes	
	Elles permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison **pivot glissant**

vis à billes	
 	Elles permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison **hélicoïdale**

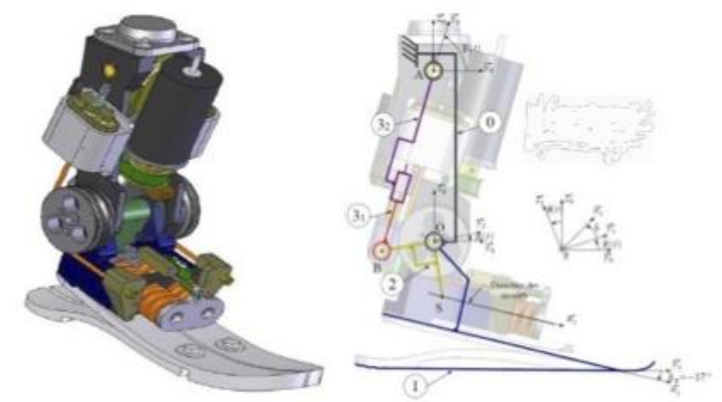
guidages à billes	
	Ils permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison **glissière**

Rotules lisses	
 	Elles permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison **sphérique**

5. Le schéma cinématique

Le <u>schéma cinématique</u> est un **outil de description simplifiée d'un système réel** (il ne tient compte ni des formes, ni des dimensions des pièces).

Il permet de faire apparaître clairement les mouvements possibles entre les solides qui constituent le système ainsi que les paramètres de mouvement associés.



Il permet ainsi de faciliter :

- la **compréhension du fonctionnement**,
- la **détermination des vecteurs vitesse** et **accélération** (chapitre « Déterminer les caractéristiques des mouvements »),
- la **détermination des efforts** lors de l'étude du comportement dynamique du système (2ème année).

5.1. Démarche d'élaboration d'un schéma cinématique

Etape 1 : Identifier les Classes d'Equivalence Cinématique[1]

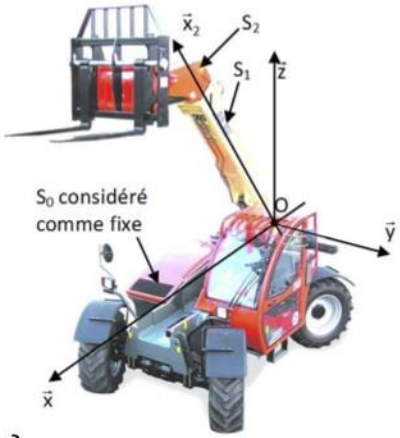
Cela consiste à repérer sur le système réel les pièces qui n'ont pas de mouvement relatif entre elles et à les regrouper.

Pour cela :

- rechercher et colorier chaque CEC sur la représentation technique 2D ou 3D du système;
- nommer chacune des CEC et lister les pièces principales qui les constituent.

[1] : CEC = solides

Exemple : nacelle élévatrice (à l'arrêt)



S_0={roues, chassis, cabine}

S_1={mât inférieur}

S_2={mât supérieur, fourche}

Remarques :

- Toutes les pièces déformables sont à exclure des CEC (ressorts, rondelles élastiques, barres de torsion, joints…) ;
- Les éléments roulants (billes, rouleaux…) des roulements, butées, douilles, vis et guidages sont à exclure des CEC.

Etape 2 : Réaliser le graphe des liaisons

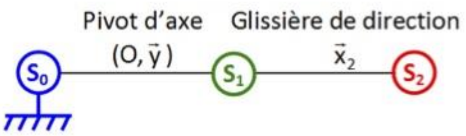
Pour cela :

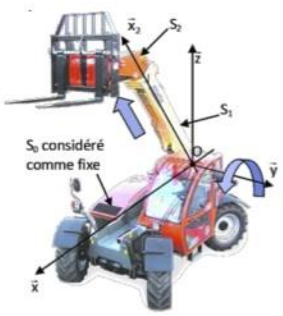
- représenter les CEC par des bulles et les placer en respectant si possible leurs positions relatives observées sur le système réel;
- repérer la CEC qui correspond au solide considéré comme fixe ;
- identifier les mouvements relatifs entre deux CEC en contact, choisir la liaison usuelle associée et la représenter par un lien entre les deux bulles.

Pour trouver les liaisons, on peut utiliser les deux questions suivantes :

- ***Quels sont les mouvements relatifs possibles entre les solides ?***
- ***Quelle est la nature des surfaces en contact entre les solides ?***

Exemple : nacelle élévatrice





Remarque :
Lorsque cela est possible[4], on peut simplifier le graphe des liaisons en remplaçant des liaisons en parallèle ou en série par leur liaison équivalente.
Cela permet d'obtenir un ***graphe des liaisons minimal*** qui peut être plus adapté à l'étude que l'on souhaite ensuite réaliser[5].

[4] [5] : voir § 6

Etape 3 : Elaborer le schéma cinématique

Pour cela :

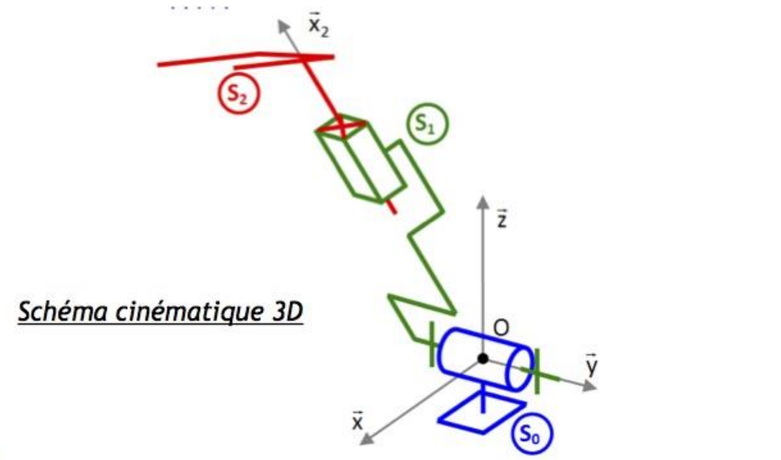
- positionner les centres et les axes des liaisons en respectant si possible leurs positions relatives observées sur le système réel;

- mettre en place, en s'appuyant sur le graphe des liaisons, les symboles des liaisons usuelles en utilisant le code couleur retenu et en respectant leur orientation;

- relier par des traits les éléments des symboles de liaisons qui sont de même couleur en respectant si possible l'architecture du système réel et en évitant que des traits se croisent.

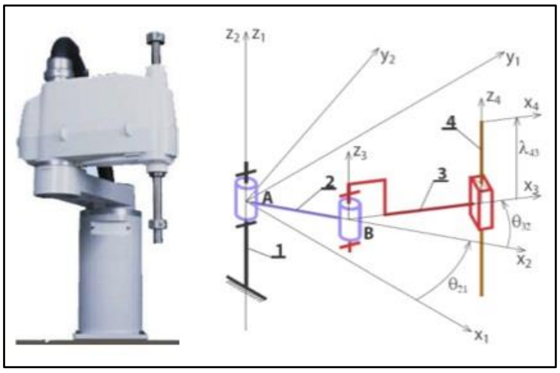
- vérifier la cohérence entre les mouvements possibles entre les CEC sur le schéma cinématique et les mouvements observés sur le système réel.

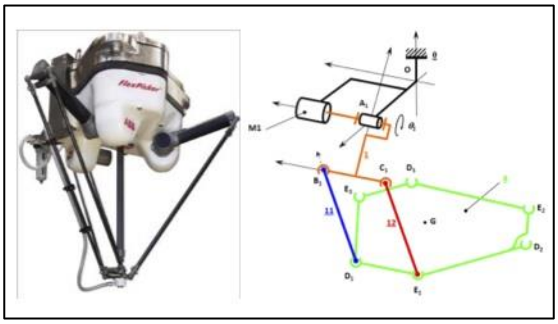
Exemple : Nacelle élévatrice

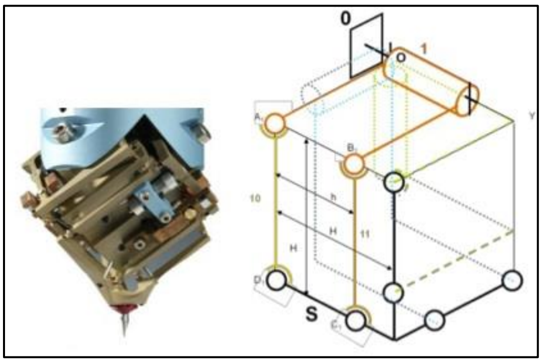


Remarque :
Si le schéma cinématique a été conçu en s'appuyant sur le graphe des liaisons minimal, on parle du ***schéma cinématique minimal***.

Exemples de schémas cinématiques :







Etape 4 : Définir les paramètres cinématiques

Cette étape consiste à représenter les paramètres cinématiques sur le schéma cinématique et à représenter les figures géométrales (ou figures planes)

Pour définir la position d'un solide par rapport à un autre, on retrouve deux types de paramètres :

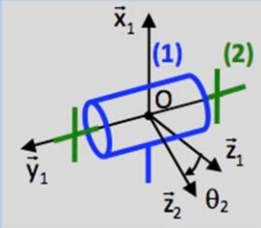
- le paramètre de translation (par exemple λ),
- le paramètre de rotation (par exemple θ).

Ils sont donnés algébriquement.

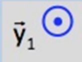
Pour cela :

- **On définit la direction (translation) ou l'axe (rotation) de la liaison** :
  - Pour une translation : représenter **la direction** de celle-ci **dans le plan de la feuille**
  - Pour une rotation : représenter **l'axe** de celle-ci **venant vers vous**
- **On trace la base de référence** :
  - Il est IMPÉRATIF que la base ainsi tracée soit **orthonormée directe**
- **On identifie le paramètre linéaire** (translation) **ou angulaire** (rotation) (de quel axe part-il ? et sur quel axe arrive-t-il ?) **et on trace l'autre base**.
  - Pour une rotation il est IMPÉRATIF que le paramètre angulaire soit représenté dans le premier cadran, positif et à peu près égal à 20°.

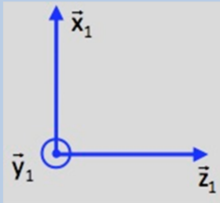
Exemple :



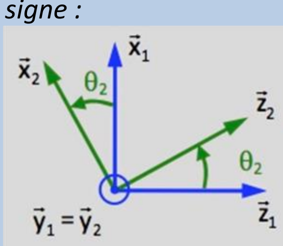
Il s'agit ici d'une liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{y_1})$:



Ici on trace la base 1 et, $\overrightarrow{y_1}$ venant vers nous, $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{z_1}$ sont forcément positionnés comme ci-dessous :



Ici on ne se soucie pas de la valeur de l'angle représenté sur le schéma en perspective de la liaison (négatif). On représente cet angle indépendamment de sa valeur et de son signe :



Exemple : Nacelle élévatrice

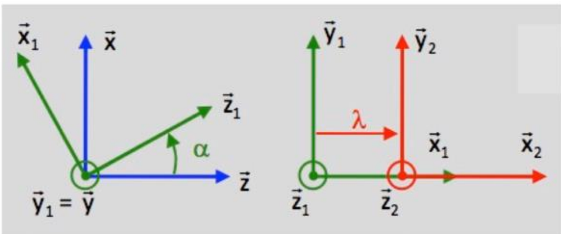
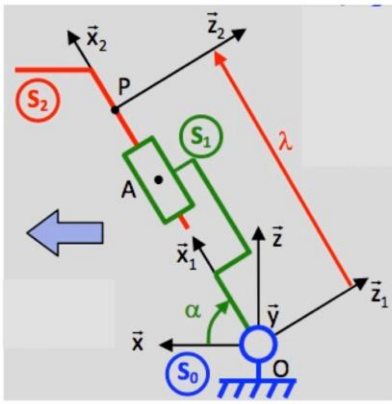


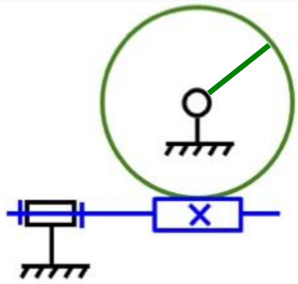
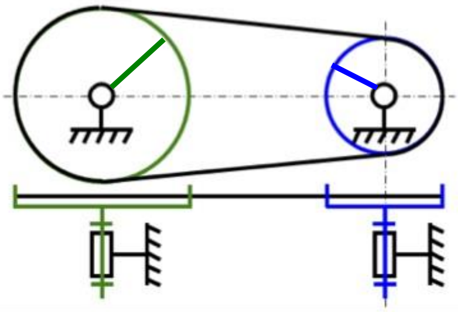
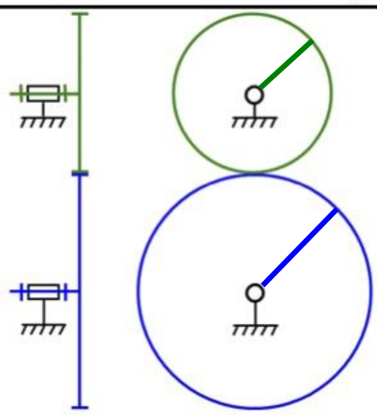
Schéma cinématique 2D



5.2. Symboles associés aux transmetteurs usuels

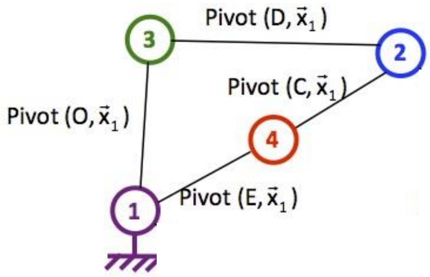
On trouve, sur les systèmes réels, de nombreux dispositifs permettant d'adapter et de transmettre l'énergie mécanique.

Il faut donc savoir représenter ou identifier, dans un schéma cinématique, les plus courants d'entre eux.

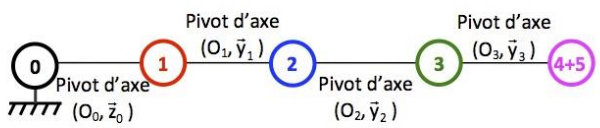
Roue et vis sans fin 	
Poulie-courroie 	
Engrenages 	

6. Loi Entrée-Sortie d'un mécanisme

Les transmetteurs/adaptateurs sont modélisables par des graphes des liaisons en **chaîne fermée**.



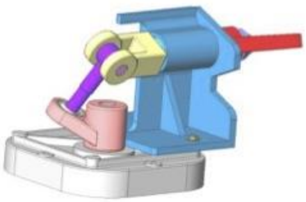
Chaîne fermée



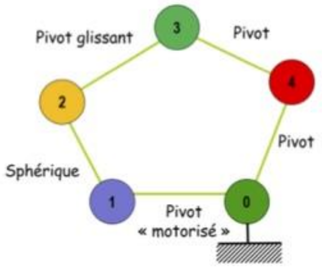
Chaîne ouverte

Or, dans un mécanisme en chaîne fermée, il y a en général un seul solide mis en mouvement par un actionneur. C'est justement la structure bouclée du mécanisme qui fait que la mise en mouvement de ce solide va entrainer celui de tous les autres solides et en particulier celui lié à l'effecteur de la chaîne d'énergie.

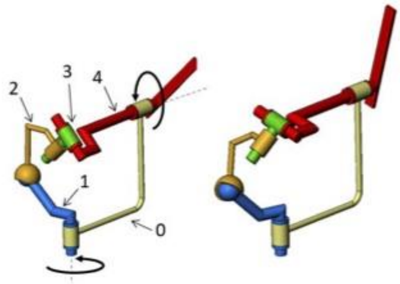
<u>Exemple</u> : Transmetteur avec transformation de mouvement de la barrière de parking Sinusmatic



Représentation 3D



Graphe de liaisons



Schémas cinématiques dans différentes positions

Le solide 1, animé d'un mouvement de rotation continue par rapport au bâti 0 grâce à un motoréducteur, permet la mise en rotation alternative du solide 4 sur lequel est fixée la lisse de la barrière.

6.1. Paramètre de mouvement d'entrée

Le solide mis en mouvement par l'actionneur est qualifié comme étant le **solide d'entrée** du transmetteur.

Il est le point d'entrée de l'énergie mécanique qui va circuler jusqu'à l'effecteur.
La position (linéaire ou angulaire), respectivement la vitesse, du solide d'entrée correspond au paramètre de mouvement de l'entrée, respectivement à sa dérivée temporelle, de la liaison entre ce solide et le bâti du transmetteur.

Exemple : dans le cas du transmetteur avec transformation de mouvement de la barrière sinusmatic, **c'est 1 qui est le solide d'entrée**. <u>Il est en liaison pivot par rapport au bâti 0, son mouvement est donc paramétré par un angle : $\theta e\ (t)$ par exemple</u>.

6.2. Paramètre de mouvement de sortie

Le solide lié à l'effecteur est qualifié comme étant le **solide de sortie** du transmetteur.

Il est le point de sortie de l'énergie mécanique qui va circuler depuis l'actionneur.

La position (linéaire ou angulaire), respectivement la vitesse, du solide de sortie correspond au paramètre de mouvement de sortie, respectivement à sa dérivée temporelle, de la liaison entre ce solide et le bâti du transmetteur.

Exemple : dans le cas du transmetteur avec transformation de mouvement de la barrière sinusmatic, **c'est 4 qui est le solide de sortie**. <u>Il est en liaison pivot par rapport au bâti 0, son mouvement est donc paramétré par un angle : $\theta s\ (t)$ par exemple</u>.

6.3. Loi entrée-sortie cinématique

On appelle **loi entrée-sortie cinématique** d'un transmetteur/adaptateur, **la relation mathématique entre le paramètre cinématique du solide d'entrée et celui du solide de sortie**.

Exemple : dans le cas du transmetteur avec transformation de mouvement de la barrière Sinusmatic, la loi entrée-sortie cinématique est : $\boldsymbol{\theta_s(t) = g(\theta_e(t))}$ ou $\boldsymbol{\theta_e(t) = f(\theta_s(t))}$

Certaines caractéristiques géométriques sont invariantes, elles font partie de la définition physique du mécanisme et sont supposées connues : longueurs, diamètres, …
D'autres paramètres sont des données variables représentatives des mouvements du système. Dans le cas de chaines cinématiques fermées, la loi entrée-sortie est une loi exprimant le paramètre de sortie du système uniquement en fonction du paramètre d'entrée et des caractéristiques géométriques invariantes du système.
La loi entrée sortie d'une chaîne cinématique fermée peut être obtenue par :

- **une fermeture géométrique** : méthode décrite ci-dessous,
- une fermeture par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante,
- l'écriture d'une équation obtenue par une condition de non glissement,
- une fermeture cinématique.

Loi entrée-sortie par fermeture géométrique :

- Écrire la **relation vectorielle de fermeture géométrique** de la chaîne de solides du mécanisme :
  - Relation de Chasles entre **les points caractéristiques des liaisons** en parcourant la chaîne fermée : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
- **Projeter l'équation de fermeture ci-dessus** dans une base judicieuse afin d'obtenir un système de 3 équations scalaires comportant les paramètres d'E/S.
- **Éliminer les paramètres de mouvement autres que ceux d'entrée et de sortie**, en combinant les équations obtenues.

Règle 1

Pour **éliminer un angle** β présent dans 2 équations en cosinus et sinus, on exprime les relations sous la forme :

$$\cos(\beta) = f(\alpha, \lambda)$$
$$\sin(\beta) = g(\alpha, \lambda)$$

D'où $f^2(\alpha, \lambda) + g^2(\alpha, \lambda) = 1$

Règle 2

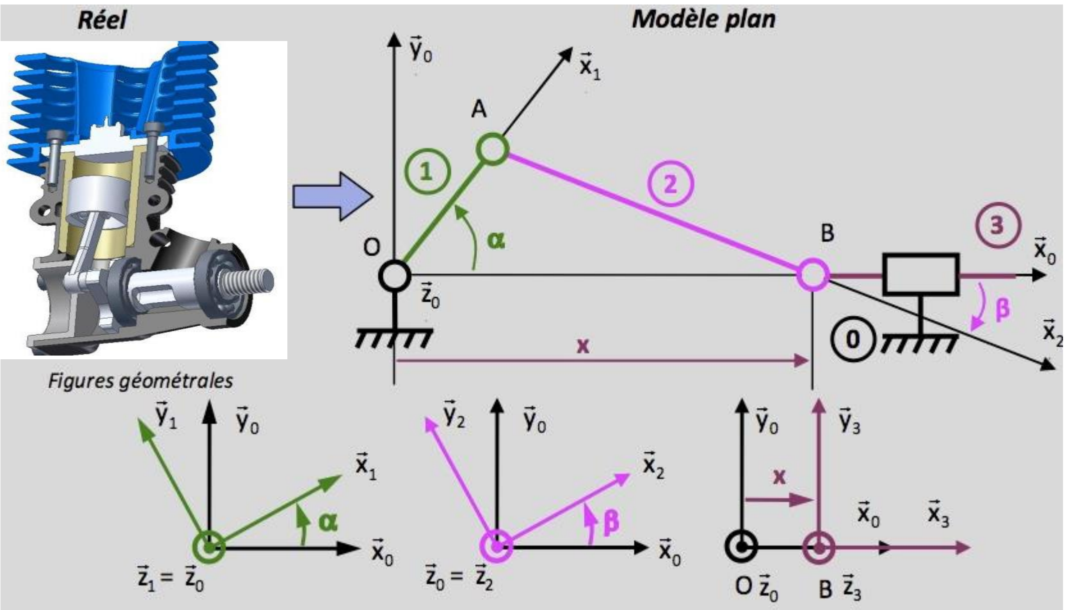
Pour **éliminer une distance λ en facteur** d'un cosinus et d'un sinus, on exprime les relations sous la forme :

$$\lambda . \cos(\beta) = f(\alpha)$$
$$\lambda . \sin(\beta) = g(\alpha)$$

D'où $\tan(\beta) = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$

Exemple : Micromoteur d'aéromodélisme :

Soit un micromoteur dont le schéma cinématique plan est donné ci-dessous. La longueur de la manivelle 1 (L_1) et de la bielle 2 (L_2) sont des caractéristiques géométriques connues et invariables. Les paramètres α, β et x sont des paramètres de position représentatifs des mouvements du système.



Le paramètre de sortie est α, il traduit la rotation de la manivelle 1 par rapport à 0 autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$. Le paramètre d'entrée est x, il traduit la translation du piston 3 par rapport à 0 suivant $\vec{x}_0$.
Le paramètre β est un paramètre intermédiaire qui traduit la rotation de la bielle 2 par rapport à 0 autour de l'axe $(B, \vec{z}_0)$.

La fermeture géométrique consiste à écrire que le vecteur nul : $\overrightarrow{\mathbf{OO}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BO}} = \vec{\mathbf{0}}$

Soit $\mathbf{L_1.\vec{x}_1 + L_2.\vec{x}_2 - x.\vec{x}_0 = \vec{0}}$

En projection sur $\vec{x}_0$: $\boldsymbol{L_1.\cos\alpha + L_2.\cos\beta - x = 0}$

En projection sur $\vec{y}_0$: $\boldsymbol{L_1.\sin\alpha + L_2.\sin\beta = 0}$

On obtient donc deux relations scalaires.
On constate alors un système avec 3 paramètres cinématiques et 2 relations de dépendance, soit un système à un degré de liberté.
Il y a donc une équation qui correspond à la loi entrée sortie du système.
Pour obtenir cette loi, il faut utiliser les 2 relations de dépendance précédentes et les combiner en une seule relation dans laquelle il faut faire disparaitre le paramètre intermédiaire β : on applique donc la « Règle 1 » :

$$\begin{cases} \cos\beta = \frac{1}{L_2}.(x - L_1.\cos\alpha) \\ \sin\beta = -\frac{L_1}{L_2}.\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{L_2}.(x - L_1.\cos\alpha)\right)^2 + \left(-\frac{L_1}{L_2}.\sin\alpha\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x - L_1.\cos\alpha)^2 = {L_2}^2 - (L_1.\sin\alpha)^2$$

Soit la loi d'entrée sortie : $\boxed{x = L_1.\cos\alpha + \sqrt{{L_2}^2 - (L_1.\sin\alpha)^2}}$

Cette relation n'est valable que pour $L_2 > L_1$.

6.4. Linéarisation d'une loi entrée-sortie sur un domaine de validité

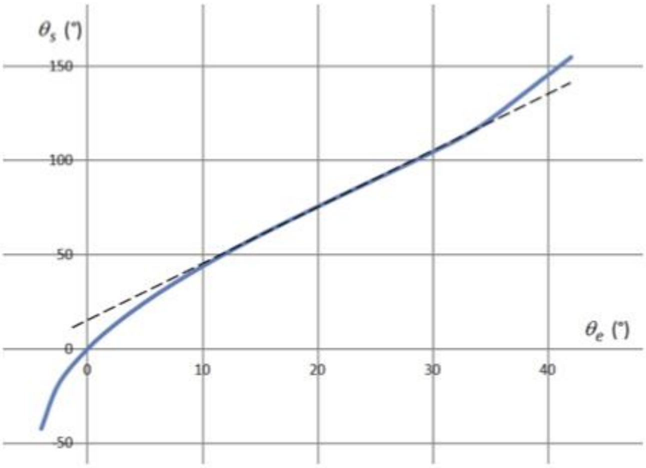
Attention par définition une loi entrée-sortie non-linéaire, ne peut être prise en compte dans une modélisation par schéma-bloc d'un SLCI (où seuls des modèles linéaires sont utilisés).

Si et seulement si, le transmetteur évolue linéairement autour d'un point de fonctionnement ou d'une plage de points (qui constituera le domaine de validité), la loi entrée-sortie peut alors être linéarisée.

Exemple : la loi entrée-sortie ci-contre peut être linéarisée pour la plage de valeurs :

$$\boxed{10° < \theta_e < 35°}$$

On alors, uniquement sur le domaine de validité décrit ci-dessus : $\theta_s = a\,.\,\theta_e + b \Longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\omega_s = a\,.\,\omega_e}}$
avec a et b des constantes.



6.5. Loi entrée-sortie d'un mécanisme en chaîne ouverte : Modèle géométrique

Dans ce type de mécanismes les paramètres cinématiques sont tous indépendants. Cela nécessite donc le pilotage de chaque paramètre cinématique.
Pour des considérations de réalisation, il est difficile d'implanter plus d'un actionneur pour piloter le mouvement d'une liaison. Ceci conduit à construire ces mécanismes sur la base de liaisons à un degré de liberté. Chaque liaison ainsi pilotée peut s'appeler un axe et on parle alors de robots trois axes, quatre axes, etc....

Pour ce type de système, on s'intéresse généralement à l'effecteur en bout de chaîne cinématique, effecteur qui peut-être une pince, une caméra, une pompe de peinture...
La loi entrée-sortie cinématique concerne donc la relation entre les **coordonnées articulaires** (c'est-à-dire les paramètres pilotant les actionneurs) et les **coordonnées opérationnelles** (c'est-à-dire les coordonnées d'un point de l'effecteur en bout de chaîne).

Dans le cas de chaine cinématique ouverte, on appelle la loi d'entrée sortie du système **modèle géométrique**.

On distingue alors le modèle géométrique direct et le modèle géométrique indirect :

- Le **modèle géométrique direct** permet de lier les coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires,
- Le **modèle géométrique indirect** permet de lier les coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles.

Exemple d'un bras de robot :