Objectif : Transformer le quotient de 2 polynômes en p en termes identifiables dans le tableau des transformées de Laplace, pour obtenir la transformée de Laplace inverse.

L'expression de départ étant sous la forme initiale : $X(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}=\dfrac{a_0+a_1p+a_2p^2+...+a_mp^m}{b_0+b_1p+b_2p^2+...+b_np^n}$ m<n

1 - Racines réelles de $D(p)$

a - Racines simples a, b, c… de $D(p)$:

On peut mettre $D(p)$ sous la forme : $D(p)=b_n\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot ...$

On peut alors écrire $X(p)$ sous la forme : $\boxed{X(p)=\left(\dfrac{A}{p-a}+\dfrac{B}{p-b}+\dfrac{C}{p-c}+...\right)}$

Les coefficients A, B, C,… se déterminent :

- par **identification** avec la forme initiale de $X(p)$,
- par la « méthode des **limites** » : par exemple, $A=\lim\limits_{p\to a}\left[(p-a)\cdot X(p)\right]$
- en donnant des **valeurs réelles particulières à p**.

b - Racines multiples a, b, c… de $D(p)$

On peut mettre $D(p)$ sous la forme : $D(p)=b_n\cdot(p-a)^{\alpha}\cdot(p-b)^{\beta}\cdot ...$

On peut alors écrire $X(p)$ sous la forme :

$$\boxed{X(p)=\left(\frac{A_1}{p-a}+\frac{A_2}{(p-a)^2}+...+\frac{A_a}{(p-a)^a}+\frac{B_1}{p-b}+\frac{B_2}{(p-b)^2}+...+\frac{B_b}{(p-b)^b}+...\right)}$$

Les coefficients A_α et B_β se calculent par la « méthode des **limites** » ;

Les autres, par exemple, en donnant des **valeurs réelles particulières à p**.

Sinon, on obtient <u>tous les termes</u> par identification.

2 - Racines complexes de $D(p)$

a - Racines $(\alpha\pm\beta j)$ simples conjuguées de $D(p)$

On peut mettre $D(p)$ sous la forme : $D(p)=[(p-(a_1+b_1j)]\times[(p-(a_1-b_1j)]\times[(p-(a_2+b_2j)]\times[(p-(a_2-b_2j)]\times..$

$$D(p)=[(p-a_1)^2+b_1^2)]\times[(p-a_2)^2+b_2^2)]\times..$$

On peut alors écrire $H(p)$ sous la forme :

$$\boxed{X(p)=\left(\frac{A_1(p-a_1)+B_1}{(p-a_1)^2+b_1^2}+\frac{A_2(p-a_2)+B_2}{(p-a_2)^2+b_2^2}+...\right)}$$

Les constantes A_i et B_i s'obtiennent :

- par **identification** ou,
- en donnant des **valeurs particulières à p**

b - Racines multiples conjuguées de $D(p)$

On peut mettre $D(p)$ sous la forme :

$$D(p)=[(p-a_1)^2+b_1^2)]^a\times[(p-a_2)^2+b_2^2)]^b\times..$$

On peut alors écrire $H(p)$ sous la forme :

$$\boxed{X(p)=\left(\frac{A_1(p-a_1)+B_1}{(p-a_1)^2+b_1^2}+\frac{A_2(p-a_1)+B_2}{[(p-a_1)^2+b_1^2]^2}+...+\frac{A_a(p-a_1)+B_a}{[(p-a_1)^2+b_1^2]^a}+...\right)}$$

La décomposition en éléments simples de X(p) permet alors de déterminer l'expression de x(t) à l'aide des transformées de Laplace inverses usuelles ci-dessous :

x(t)	*X(p)*
Impulsion de Dirac δ(t)	1
Échelon A.u(t)	$\frac{A}{p}$
$at.u(t)$	$\frac{a}{p^2}$
$e^{-at}.u(t)$ $avec$ $a \geqslant 0$	$\frac{1}{p+a}$
$t.e^{-at}.u(t)$ $avec$ $a \geqslant 0$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin(\omega t).u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t).u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}.\sin(\omega t).u(t)$ $avec$ $a \geqslant 0$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.\cos(\omega t).u(t)$ $avec$ $a \geqslant 0$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

APPLICATION : Réponse indicielle d'un système de premier ordre

1) Exprimer la fonction de transfert d'un système de premier ordre en faisant apparaître son **gain statique K** et sa **constante de temps τ**.

2) Exprimer alors la sortie S(p) d'un système de premier ordre soumis à échelon de consigne d'amplitude E_0 en fonction de E_0, K et τ.

L'expression obtenue sera appelée la « forme initiale » de S(p).

3) Déterminer les pôles de S(p).

4) À partir de la nature des pôles de S(p) (réels/complexes, simples/multiples), déterminer la forme de la décomposition en éléments simples de S(p) en faisant apparaître des constantes A, B, C, …

5) Déterminer l'expression des constantes A, B, C … en fonction de E_0, K et τ par identification de la forme initiale de S(p) et de la forme de sa décomposition en éléments simples.

6) Par application de la transformée de Laplace inverse à S(p) décomposée en éléments simples, déterminer l'expression de la sortie s(t) d'un système de premier ordre.

7) Tracer l'allure de s(t) et déterminer l'équation de l'asymptote de la courbe représentative de s(t) quand t tend vers $+\infty$.

8) Après avoir observé que la réponse temporelle d'un système de premier ordre soumis à un échelon de consigne (réponse indicielle) ne présente pas de dépassements, déterminer l'expression de son temps de réponse en fonction de la constante τ.