

1. Réponse Harmonique

Soit un SLCI d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

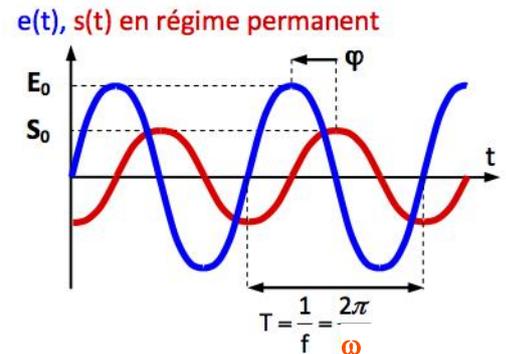
Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type

$$e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \omega : \text{pulsation du signal d'entrée,}$$

il faut chercher une sortie en régime permanent sous la forme

$$s(t) = S_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

On appelle **réponse harmonique**, la **sortie $s(t)$ en régime permanent d'un système soumis à une entrée $e(t)$ périodique**.



On peut caractériser l'effet du système uniquement avec deux grandeurs qui sont :

- le rapport des amplitudes $\frac{S_0}{E_0}$ appelé **gain du système**, qui représente l'amplification du système,
- le déphasage φ appelé **phase** et qui représente le décalage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$.

Les courbes $e(t)$ et $s(t)$ dessinées ne sont valables que pour la pulsation ω du signal d'entrée.

L'objet de l'étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du gain et de la phase, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation ω ($0 < \omega < +\infty$) du signal d'entrée.

Pour réaliser l'étude fréquentielle d'un système, on exploite la fonction de transfert du système $H(p)$ et, par la méthode des complexes, on utilise :

- le **gain** du système $\frac{S_0}{E_0}$ qui est égal au **module de $H(j\omega)$** : $\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$
- la **phase** φ du système qui est égale à **l'argument de $H(j\omega)$** : $\varphi = \arg(H(j\omega))$

où $H(j\omega)$ correspond à la fonction de transfert du système dans laquelle la variable de Laplace p a été remplacée par $j\omega$.

$H(j\omega)$ représente donc le comportement fréquentiel du système $H(p)$.

L'interprétation des variations de gain et de phase en fonction de la fréquence du signal (ou de la pulsation) est fondamentale tant en électronique qu'en automatique, c'est pourquoi le tracé graphique de ces variations est étudié à l'aide de différents diagrammes.

Les diagrammes les plus connus portent le nom de leur inventeur : Bode, Nyquist, Black. L'un des plus utilisés est le diagramme de Bode (le seul au programme de MPSI/PCSI).

2. Le diagramme de Bode, lieu de transfert pour les études fréquentielles

On appelle lieu de transfert, toute représentation graphique du comportement fréquentiel de $H(j\omega)$ à l'aide de diagrammes.

Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes correspondant aux tracés du **module** et de la **phase** de $H(j\omega)$ en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) sur une échelle logarithmique en base 10.

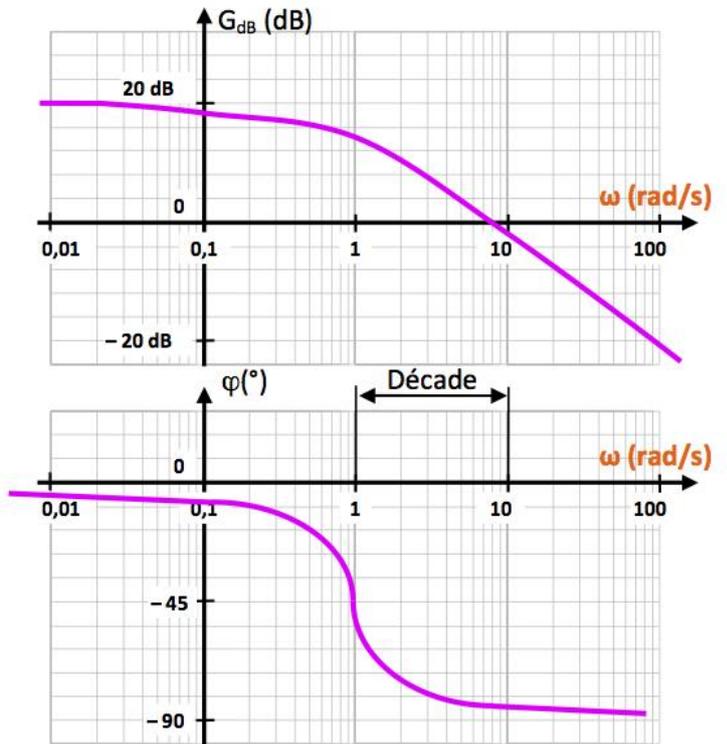
Le module $|H(j\omega)|_{dB}$, noté G_{dB} , est exprimé en décibels :

$$G_{dB} = 20 \times \log |H(j\omega)|$$

La phase φ est exprimé en degrés

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$

Les deux courbes sont tracées séparément mais sur la même feuille, l'une en dessous de l'autre, car l'interprétation des résultats nécessite toujours une étude simultanée des deux courbes.



Sur l'échelle logarithmique en base 10 il n'y a pas d'origine des abscisses. Par conséquent il n'y a jamais de 0 sur l'axe des abscisses et le tracé ne concernera qu'une bande de pulsations qu'il faudra judicieusement choisir.

Le principe du tracé d'un diagramme de Bode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur de $H(j\omega)$ suivant la nature des pôles et des zéros. Cette technique permet de décomposer $H(j\omega)$ en un produit de fonctions de transfert élémentaires bien connues et faciles à tracer dans le plan de Bode :

$$H(j\omega) = \underbrace{K}_{\text{Gain pur}} \cdot \underbrace{(j\omega)^\alpha}_{\text{Intégrateur(s)}} \cdot \underbrace{\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)}_{\text{Produit d'inverses de 1}^{\text{er}} \text{ ordre}} \cdot \underbrace{\prod_k \left[1 + \frac{2z_k \cdot j\omega}{\omega_{0k}} + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}_{\text{Produit d'inverses de 2}^{\text{ème}} \text{ ordre}} \cdot \underbrace{\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)}_{\text{Produit de systèmes de 1}^{\text{er}} \text{ ordre}} \cdot \underbrace{\prod_p \left[1 + \frac{2z_p \cdot j\omega}{\omega_{0p}} + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}_{\text{Produit de systèmes de 2}^{\text{ème}} \text{ ordre}}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+T_n \cdot j\omega} \right| &= \frac{|1|}{|1+T_n \cdot j\omega|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + T_n^2 \cdot \omega^2}} \end{aligned}$$

Le module de $H(j\omega)$ est alors le produit des modules de chaque fonction de transfert élémentaire.

L'argument de $H(j\omega)$ est alors la somme des arguments de chaque fonction de transfert élémentaire :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{1}{1+T_n \cdot j\omega}\right) &= -\arg(1+T_n \cdot j\omega) \\ &= -\arctan(\text{Im}/\text{Re}) \\ &= -\arctan(T_n \cdot \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(H(j\omega)) &= \arg\left(\frac{K}{(j\omega)^\alpha}\right) + \sum_m \arg(1+T_m \cdot j\omega) + \sum_k \arg\left(1+2 \cdot \frac{z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega\right)^2\right) \\ &\quad - \sum_n \arg(1+T_n \cdot j\omega) - \sum_p \arg\left(1+2 \cdot \frac{z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega\right)^2\right) \end{aligned}$$

L'échelle en dB permet de transformer le produit des modules en une somme. On peut donc tracer séparément les diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire qui compose $H(j\omega)$, puis faire la somme des modules et des arguments afin d'obtenir le diagramme de Bode final qui correspondra au comportement fréquentiel du système $H(j\omega)$.

En effet, si $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$ alors $20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log |H_1(j\omega)| + 20 \cdot \log |H_2(j\omega)|$

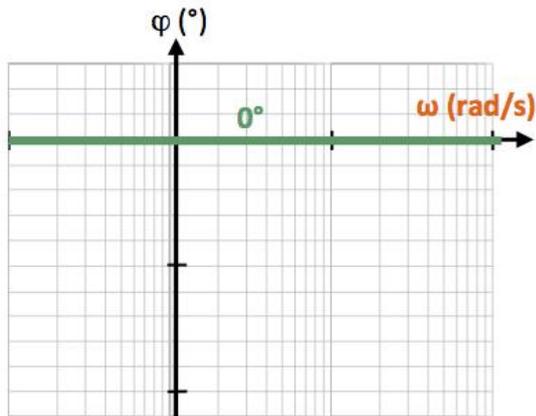
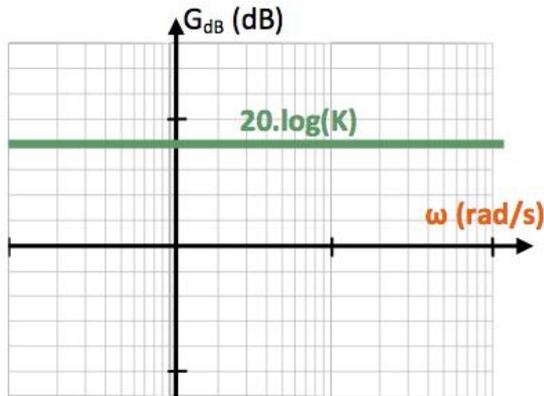
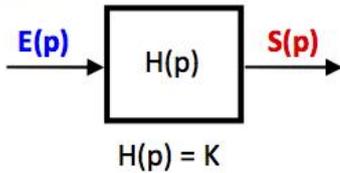
3. Réponses harmoniques des systèmes élémentaires

Pour réaliser le diagramme de Bode d'une fonction de transfert quelconque, il est donc nécessaire de connaître les diagrammes de Bode des fonctions de transfert élémentaires :

- Le gain pur K ,
- L'intégrateur $\frac{K}{p}$,
- Le premier ordre $\frac{K}{1+T \times p}$ et son inverse $K \cdot (1+T \times p)$,
- Le deuxième ordre $\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + \frac{1}{\omega_0^2} \times p^2}$ et son inverse $K \cdot \left(1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2\right)$.

3.1. Réponse harmonique des systèmes simples

Gain pur :

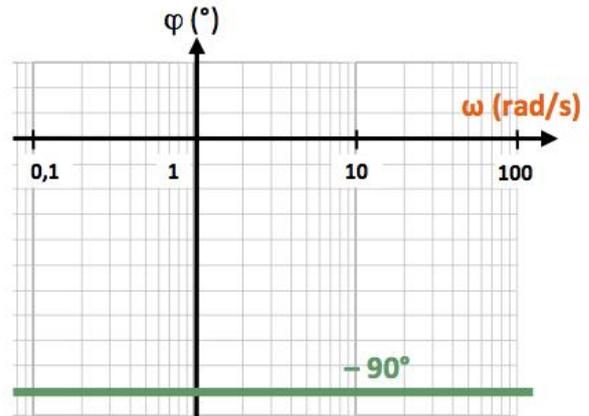
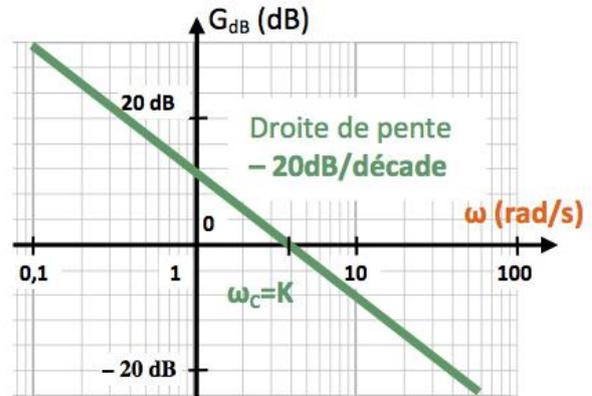
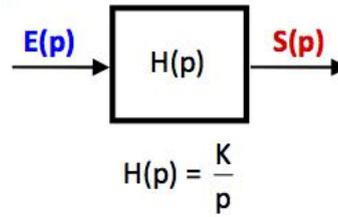


$$H(p) = K \rightarrow \text{soit : } H(j\omega) = K$$

Gain en dB :
 $G_{dB} = 20 \cdot \log(K)$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) = 0^\circ$

Intégrateur :



$$H(p) = \frac{K}{p} \rightarrow \text{soit : } H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

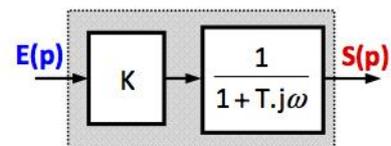
Gain en dB :
 $G_{dB} = 20 \cdot \log \left| \frac{K}{j\omega} \right| = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega)$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) = -90^\circ$

3.2. Réponse harmonique d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1+T \times p} \text{ soit } H(j\omega) = \frac{K}{1+T \times j\omega}$$



Gain en dB : $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1+(T\omega)^2}$

Phase : $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(1+T \cdot j\omega) = -\arctan(T\omega)$

Asymptotes du diagramme de Bode :

- Pour $\omega \rightarrow 0$: $H(j\omega) \gg K$ (équivalent au comportement d'un gain pur)

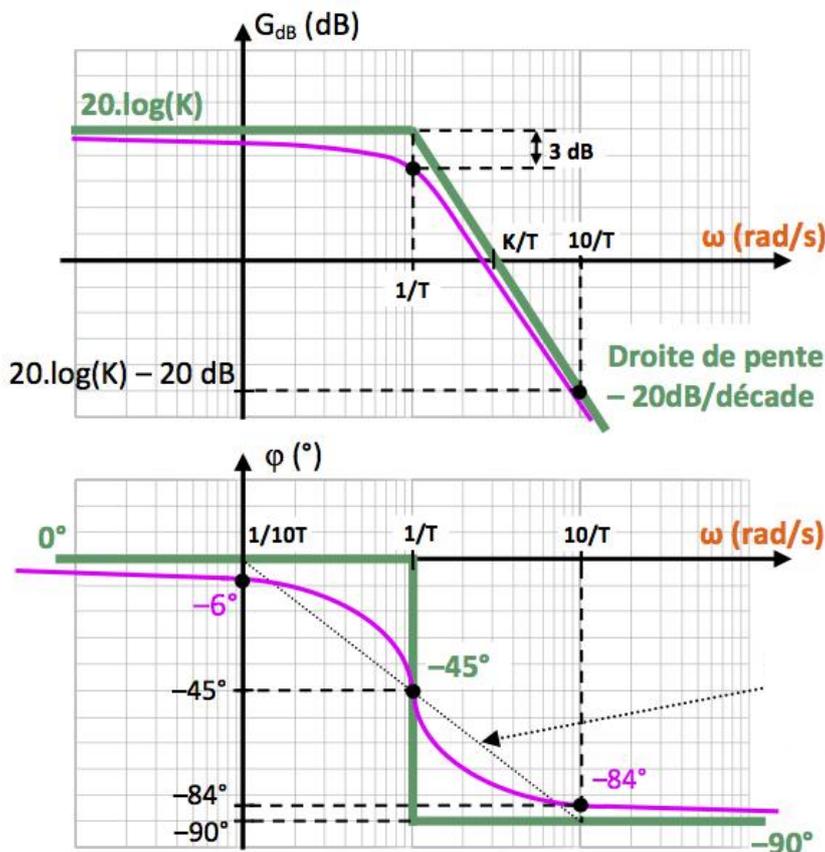
Gain : $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| \gg 20 \log K$

Phase : $\varphi = \arg(H(j\omega)) \gg \arg(K) \gg 0^\circ$

- Pour $\omega \rightarrow \infty$: $H(j\omega) \gg \frac{K}{T \times j\omega}$ (équivalent au comportement d'un intégrateur)

Gain : $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| \gg 20 \log \frac{K}{T} - 20 \log \omega$ (droite de pente -20dB/décade)

Phase : $\varphi = \arg(H(j\omega)) \gg -90^\circ$



Valeur particulière pour la pulsation de cassure :

$\omega_c = \frac{1}{T}$ est la pulsation de cassure du diagramme de Bode.

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega_c) &= 20 \log |H(j\omega_c)| \\ &= 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} \\ &= 20 \log K - 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega_c) = \arg(H(j\omega)) = -\arctan(1) = -45^\circ$$

3.3. Réponse harmonique d'un système du deuxième ordre

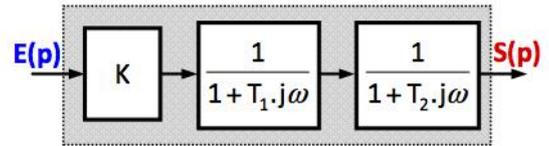
Un système du deuxième ordre a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + \frac{1}{\omega_0^2} \times p^2} \quad \text{soit} \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \times j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} \times (j\omega)^2}$$

Pour $z > 1$: La fonction de transfert présente 2 pôles réels simples p_1 et p_2 (voir cours précédent : Réponse temporelle d'un SLCI).

Le système peut alors être considéré comme le produit d'un gain pur et de deux systèmes du 1^{er} ordre de constantes de

$$\text{temps } T_1 = -\frac{1}{p_1} \text{ et } T_2 = -\frac{1}{p_2}$$

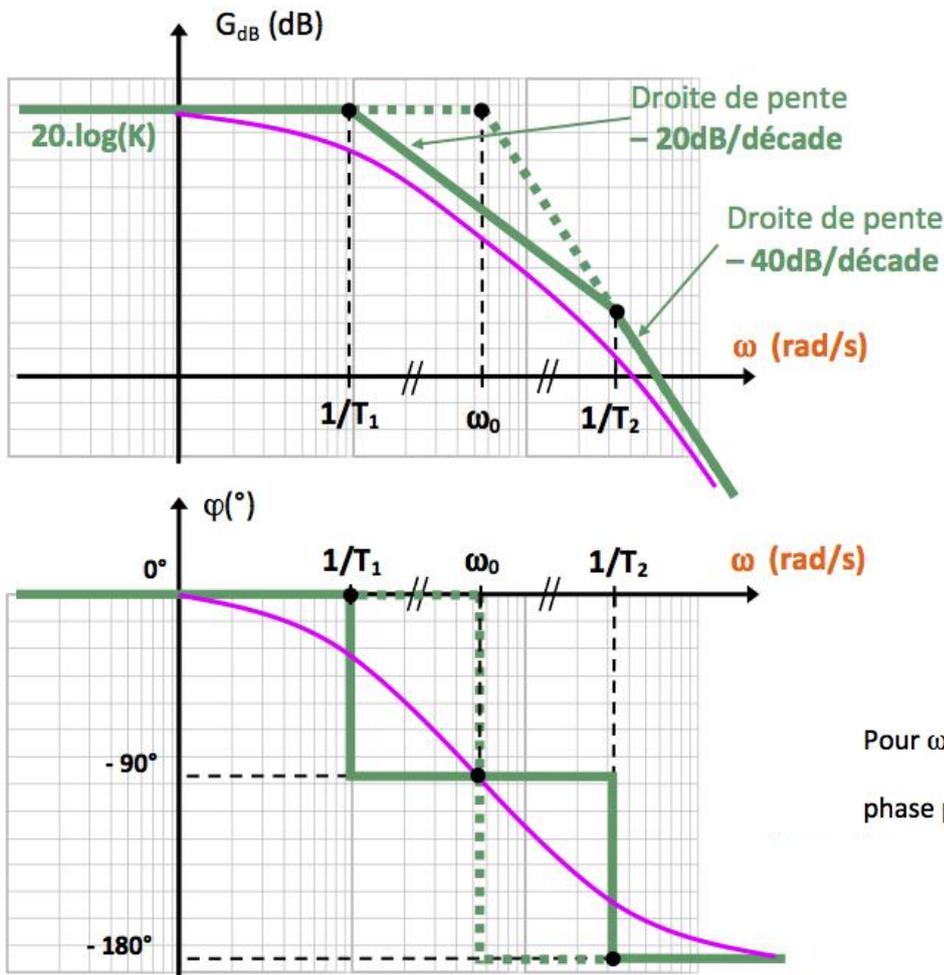


Le tracé asymptotique se construit alors en ajoutant les tracés du gain pur et des deux systèmes du 1^{er} ordre construits séparément dans un premier temps.

Pour $z = 1$: La fonction de transfert présente un pôle réel double $p_0 = -\omega_0$ (voir cours précédent : Réponse

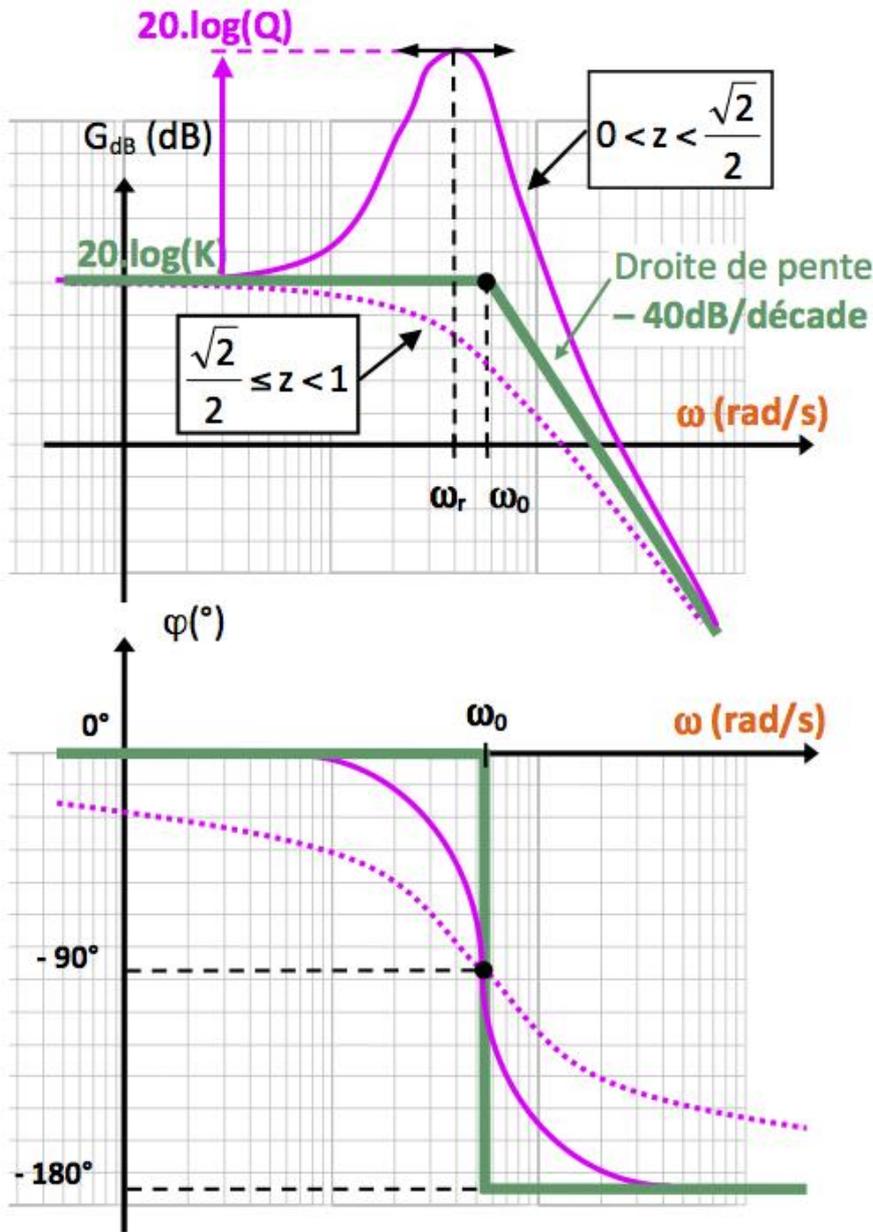
temporelle d'un SLCI) et devient un carré parfait : $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + T \cdot j\omega)^2}$ avec $T = -\frac{1}{p_0} = \frac{1}{\omega_0}$

La figure ci-dessous présente le tracé asymptotique en vert et le tracé réel en rose d'un système du premier ordre pour $z > 1$ et uniquement le tracé asymptotique en pointillés pour $z = 1$:



Pour $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}$ la courbe de phase passe toujours par -90° .

Pour $z < 1$: La fonction de transfert présente 2 pôles complexes conjugués p_1 et p_2 (voir cours précédent : Réponse temporelle d'un SLCI).



Pulsation de résonance :

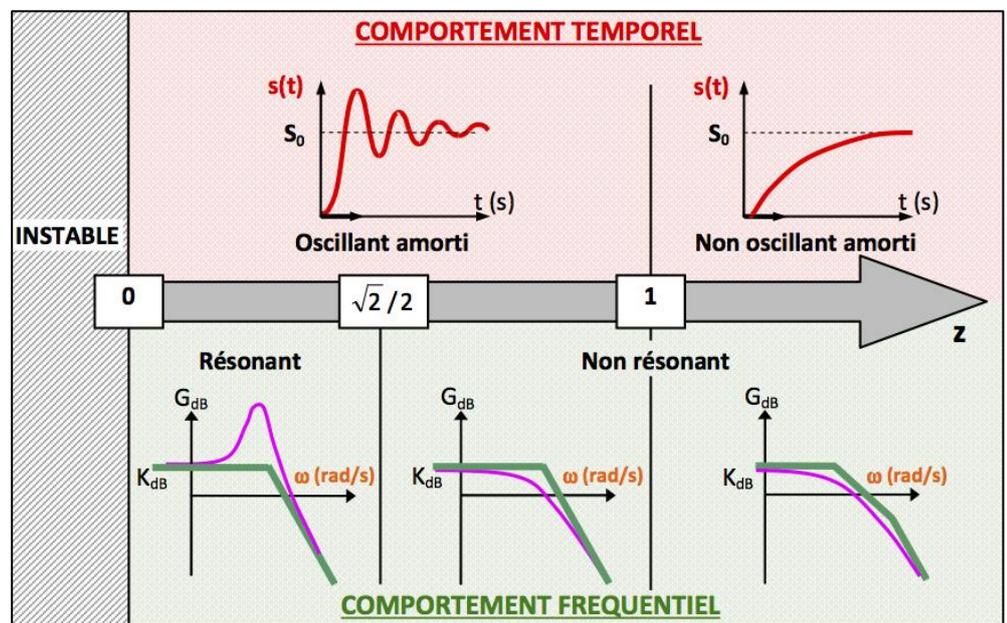
$$\omega_r = \omega_0 \times \sqrt{1 - 2z^2} \quad \text{si } z < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Coefficient de surtension Q :

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j0)|} = \frac{1}{2z \times \sqrt{1 - z^2}}$$

Voir annexe des ducs p.9 pour le détail du tracé réel.

3.4. Synthèse sur les comportements temporels et fréquentiels du 2^{ème} ordre



4. Méthode de construction du diagramme du Bode de systèmes d'ordre quelconque

Étape 1 : La fonction de transfert peut se mettre en général sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \cdot \frac{\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)}{\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left[1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}{\prod_p \left[1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}$$

Diagram illustrating the general form of the transfer function $H(j\omega)$ with annotations:

- Gain pur**: K
- Intégrateur(s)**: $(j\omega)^\alpha$
- Produit d'inverses de 1^{er} ordre**: $\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)$
- Produit de systèmes de 1^{er} ordre**: $\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)$
- Produit d'inverses de 2^{ème} ordre**: $\prod_k \left[1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$
- Produit de systèmes de 2^{ème} ordre**: $\prod_p \left[1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$

Elle apparaît ainsi comme la mise en cascade d'éléments simples du 1^{er} et 2^{ème} ordre, de leurs inverses, d'un gain et d'intégrateurs multiples.

Étape 2 : Classer les constantes de temps dans un ordre décroissant, c'est à dire les pulsations de cassure ($1/T_i$ pour un 1^{er} ordre et ω_0 pour un 2^{ème} ordre) correspondantes dans un ordre croissant. Les brisures du tracé asymptotique correspondent alors à ces pulsations.

Étape 3 : Tracer l'asymptote initiale de $H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha}$.

Étape 4 : À partir de $\omega \rightarrow 0$ et en avançant vers les pulsations croissantes, modifier l'asymptote initiale au niveau de chaque pulsation de cassure :

- **pour le gain** : la pente de l'asymptote initiale varie de ± 20 dB/décade ou ± 40 dB/décade selon qu'il s'agit d'une pulsation de cassure correspondant à un pôle (-) ou à un zéro (+) d'un terme de 1^{er} ordre (± 20 dB/décade) ou d'un terme de 2^{ème} ordre (± 40 dB/décade),
- **pour la phase** : l'asymptote initiale varie de $\pm 90^\circ$ ou $\pm 180^\circ$ selon qu'il s'agit d'une pulsation de cassure correspondant à un pôle (-) ou à un zéro (+) d'un terme de 1^{er} ordre ($\pm 90^\circ$) ou d'un terme de 2^{ème} ordre ($\pm 180^\circ$)

Étape 5 : Affiner le tracé asymptotique en traçant les courbes réelles si c'est demandé.

Reponse fréquentielle d'un SLCI d'ordre 2
modélisé par sa fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} \omega^2}$$

$$\text{donc } G_{dB}(\omega) = 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

Asymptote :

$$\omega \rightarrow 0 \quad G_{dB} = 20 \log(K)$$

$$\omega \rightarrow +\infty \quad G_{dB} = -40 \log(\omega) + 20 \log(K) + 20 \log(\omega_0^2)$$

On cherche les conditions et les pulsations pour lesquelles
 $G_{dB}(\omega)$ intercepte la première asymptote, donc pour
 $\omega < \omega_0$

on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on cherche donc $x < 1$ tel que

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2\xi x)^2} \right) = 20 \log(K)$$

$$\log \left((1 - x^2)^2 + (2\xi x)^2 \right) = 0$$

$$(1 - x^2)^2 + (2\xi x)^2 = 1$$

$$-2x^2 + x^4 + (2\xi x)^2 = 0$$

$$x^2 + 2(2\xi^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = -2(2\xi^2 - 1)$$

$$\text{donc on doit avoir } -2(2\xi^2 - 1) > 0 \quad 2\xi^2 < 1$$

$$\text{d'où } \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{et } x^2 < 1 \text{ donc } -2(2\xi^2 - 1) < 1 \quad 2\xi^2 > \frac{1}{2} \text{ d'où } \xi > \frac{1}{2}$$

pour $\xi \in]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$
 $G_d B(\omega)$ coupe donc la première asymptote
 avant ω_0 en $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = \sqrt{2} \omega_c$

On cherche maintenant les conditions pour que $G_d B(\omega)$
 coupe la seconde asymptote.

On cherche donc $\omega > \omega_0$ le $x \geq 1$ tel que

$$20 \log(k) - 20 \log(\sqrt{(1-x^2)^2 + (2\xi x)^2}) = 20 \log(k) - 20 \log(x^2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-x^2)^2 + (2\xi x)^2} &= x^2 \\ (1-x^2)^2 + (2\xi x)^2 &= x^4 \\ 1 - 2x^2 + x^4 + (2\xi x)^2 &= x^4 \\ 1 + (2\xi^2 - 2)x^2 &= 0 \\ 1 - (2 - 4\xi^2)x^2 &= 0 \\ x^2 &= \frac{1}{2 - 4\xi^2} \end{aligned}$$

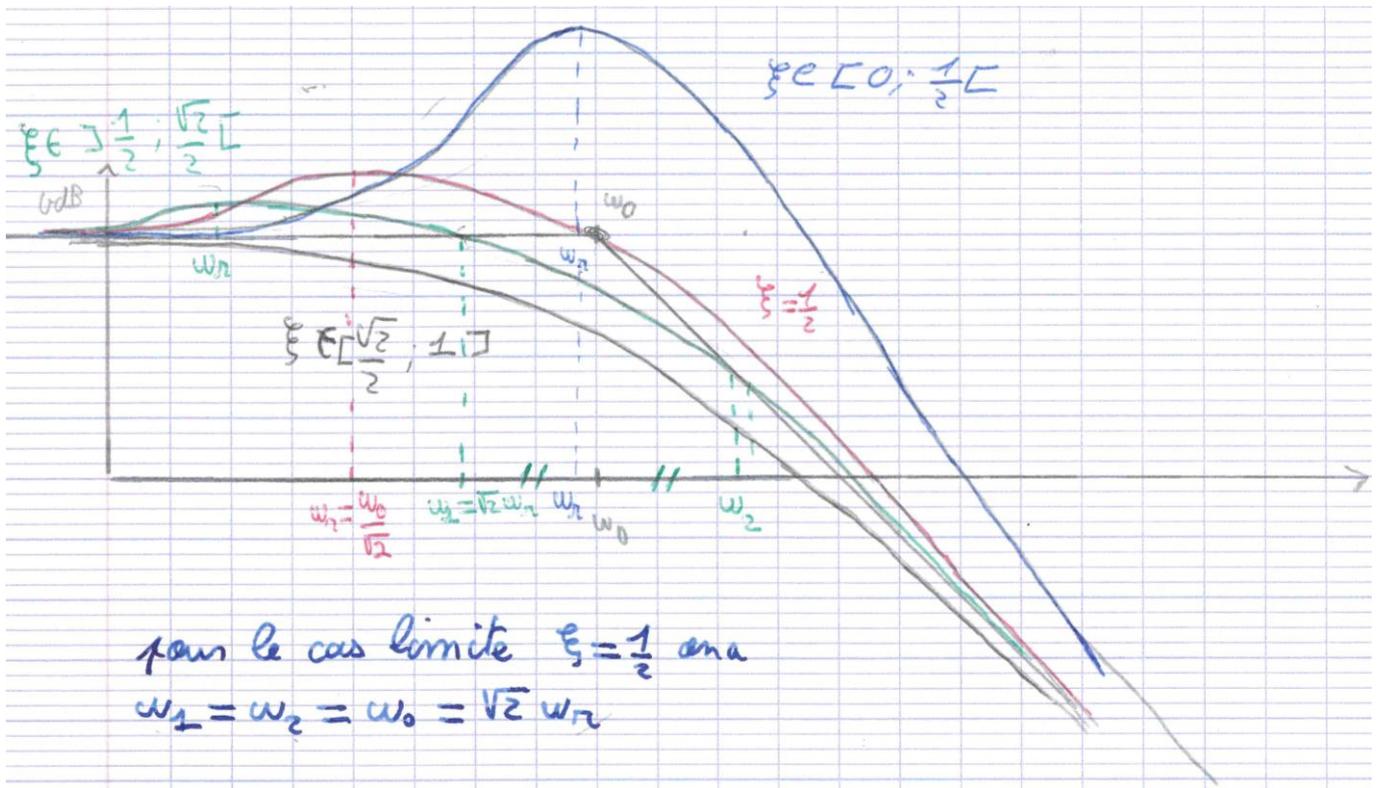
on doit donc avoir:

$$\begin{aligned} 2 - 4\xi^2 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2 - 4\xi^2} > 1 \\ \boxed{\xi^2 < \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \quad \quad 2 - 4\xi^2 < 1 \\ \boxed{\frac{1}{2} < \xi} \end{aligned}$$

Bilan si $\xi \in]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$:

$G_d B(\omega)$ coupe la seconde asymptote en $\omega_2 = \omega_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 - 4\xi^2}}$

NB: $\sqrt{\omega_1 \omega_2} = \omega_0$ ω_1 et ω_2 sont à équidistance de ω_0



Baptiste Du Crest de Villeneuve - Noé Casteleyn ©