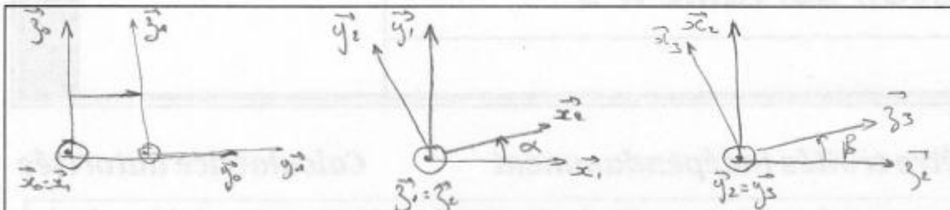
CORRIGÉ

Question 1 : Construire les figures géometrales puis exprimer les vecteurs rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.



$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0}$ $\quad$ $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\alpha}\,\vec{z_1}$ $\quad$ $\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \dot{\beta}\,\vec{y_3}$

$$\vec{x_3} = \cos\beta\,\vec{x_2} - \sin\beta\,\vec{z_2}$$

$$\boxed{\vec{y_3} = \vec{y_2} = \cos\alpha\,\vec{y_0} - \sin\alpha\,\vec{x_0}}$$

$$\vec{x_2} = \cos\alpha\,\vec{x_0} + \sin\alpha\,\vec{y_0}$$

$$\vec{z_2} = \vec{z_0}$$

$$\vec{x_3} = \cos\beta\cos\alpha\,\vec{x_0} + \cos\beta\sin\alpha\,\vec{y_0} - \sin\beta\,\vec{z_0}$$

Question 2 : Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$ par le **calcul direct**.

$$\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\frac{d(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})}{dt}\right]_{R_0} = \left.\frac{d\,\lambda\vec{y_0}}{dt}\right]_{R_0} + \underbrace{\left.\frac{d\,H\vec{z_1}}{dt}\right]_{R_0}}_{=\vec{0}} + \left.\frac{d\,L\vec{z_3}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= \dot{\lambda}\,\vec{y_0} + L\left.\frac{d\vec{z_3}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\left.\frac{d\vec{z_3}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\frac{d\vec{z_3}}{dt}\right]_{R_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \vec{z_3}$$

$$= (\dot{\beta}\,\vec{y_2} + \dot{\alpha}\,\vec{z_2}) \wedge \vec{z_3}$$

$$= \dot{\beta}\,\vec{x_3} + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y_3}$$

D'où

$$\boxed{\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \dot{\lambda}\,\vec{y_0} + L(\dot{\beta}\,\vec{x_3} + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y_3})}$$

Question 3 : Retrouver l'expression de $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$ par la **composition des mouvements**.

$$\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \overrightarrow{V_{P,3/2}} + \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \overrightarrow{V_{P,1/0}}$$

avec

$$\overrightarrow{V_{P,3/2}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{B,3/2}}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = -L\vec{z_3} \wedge \dot{\beta}\,\vec{y_3} = L\dot{\beta}\,\vec{x_3}$$

$$\overrightarrow{V_{P,2/1}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{A,2/1}}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = (-L\vec{z_3} - H\vec{z_1}) \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z_1} = L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y_3}$$

$$\overrightarrow{V_{P,1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}} = \dot{\lambda}\,\vec{y_0}$$

D'où

$$\boxed{\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \dot{\lambda}\,\vec{y_0} + L(\dot{\beta}\,\vec{x_3} + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y_3})}$$

Question 4 : Déterminer l'expression du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{P,3/0}}$.

$$\overrightarrow{\Gamma_{P,3/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_{P,3/0}}}{dt}\right]_{R_0} = \ddot{\lambda}\,\vec{y_0} + L\left.\frac{d(\dot{\beta}\,\vec{x_3} + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y_3})}{dt}\right]_{R_0}$$

avec

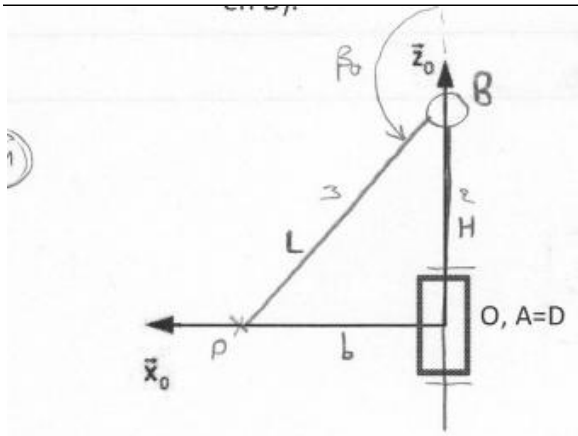
$$\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \vec{x_3} = (\dot{\beta}\,\vec{y_3} + \dot{\alpha}\,\vec{z_2}) \wedge \vec{x_3} = -\dot{\beta}\,\vec{z_3} + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y_3}$$

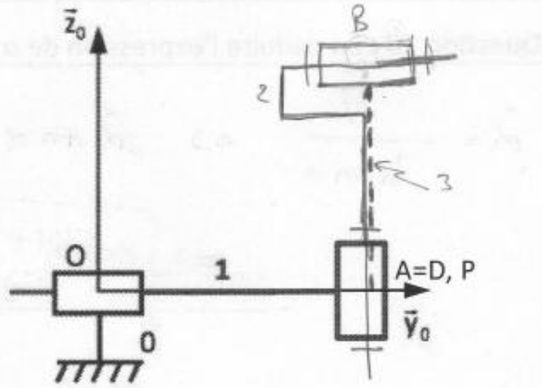
$$\left.\frac{d\vec{y_3}}{dt}\right]_{R_0} = (\dot{\beta}\,\vec{y_3} + \dot{\alpha}\,\vec{z_2}) \wedge \vec{y_3} = -\dot{\alpha}\,\vec{x_2}$$

Donc

$$\overrightarrow{\Gamma_{P,3/0}} = \ddot{\lambda}\,\vec{y_0} + L\left[\ddot{\beta}\,\vec{x_3} + \dot{\beta}(-\dot{\beta}\,\vec{z_3} + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y_3}) + (\ddot{\alpha}\sin\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta)\vec{y_3} - \dot{\alpha}^2\sin\beta\,\vec{x_2}\right]$$

$$= \ddot{\lambda}\,\vec{y_0} + L\left[\ddot{\beta}\,\vec{x_3} + (2\dot{\beta}\dot{\alpha}\cos\beta + \ddot{\alpha}\sin\beta)\vec{y_3} - \dot{\beta}^2\,\vec{z_3} - \dot{\alpha}^2\sin\beta\,\vec{x_2}\right]$$





$$\vec{V}_{P,3/0} = \dot{\lambda}\vec{y_0} + L\left[\dot{\beta}\left(\cos\beta\cos\alpha\,\vec{x_0} + \cos\beta\sin\alpha\,\vec{y_0} - \sin\beta\,\vec{z_0}\right) + \dot{\alpha}\sin\beta\left(\cos\alpha\,\vec{y_0} - \sin\alpha\,\vec{x_0}\right)\right]$$

En projection dans B_0 on peut donc écrire :

$$\begin{cases} L\left(\dot{\beta}\cos\beta\cos\alpha - \dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha\right) = V & (1) \\ \dot{\lambda} + L\left(\dot{\beta}\cos\beta\sin\alpha + \dot{\alpha}\sin\beta\cos\alpha\right) = 0 & (2) \\ -L\dot{\beta}\sin\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow \dot{\beta} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = cte = \beta_0}$

Question 7 : Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L, V, α et β_0.

$(1) \Rightarrow \boxed{\dot{\alpha} = -\dfrac{V}{L\sin\beta_0\sin\alpha}}$

$(2) \Rightarrow \dot{\lambda} = -L\dot{\alpha}\sin\beta_0\cos\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\lambda} = \dfrac{V}{\tan\alpha}}$

Question 8 : À l'aide de la figure précédente, exprimer β_0 en fonction de b et L.

$\sin(\pi - \beta_0) = \dfrac{b}{L} \Rightarrow \boxed{\beta_0 = \text{Arcsin}\,\dfrac{b}{L}}$

Question 9 : Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V, b et α.

On a donc $\boxed{\dot{\lambda} = \dfrac{V}{\tan\alpha}}$ (inchangé)

Et $\boxed{\dot{\alpha} = -\dfrac{V}{b\sin\alpha}}$

Question 10 : En déduire l'expression de $\alpha(t)$ en fonction de V et b.

$\dot{\alpha} = -\dfrac{V}{b\sin\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha}\sin\alpha = -\dfrac{V}{b}$

$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha(t) = \dfrac{V}{b}t + cte}$