

Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

II. Modélisation du manipulateur maître

II.2.1 Mesure de l'écart entre les performances géométriques souhaitées et simulées

Q1. Fermeture géométrique

En s'appuyant sur la figure 5, la fermeture géométrique donne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

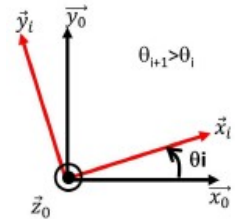
D'où, en tenant compte du paramétrage du sujet : $L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - L_2 \cdot \vec{x}_3 - L_2 \cdot \vec{x}_2 = \vec{0}$

Or on a pour $i=1,2,3$: $\vec{x}_i = \cos(\theta_i) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_i) \cdot \vec{y}_0$

D'où les relations en projection dans le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$:

$$\text{sur } \vec{x}_0 : L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) - L_2 \cdot \cos(\theta_2) = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) - L_2 \cdot \sin(\theta_2) = 0 \quad (1.2)$$



Pour obtenir la relation demandée, il faut isoler θ_2 puis le faire « disparaître » :

$$(1.1) : L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) = L_2 \cdot \cos(\theta_2)$$

$$(1.2) : 0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) = L_2 \cdot \sin(\theta_2)$$

Ainsi la somme des carrés des relations (1.1) et (1.2) donne :

$$L_2^2 \cdot (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) = (L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2$$

$$\text{D'où finalement : } L_2 = \sqrt{(L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2} \quad \text{car } L_2 > 0.$$

Q2. Position du point E

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{CE} = 2 \cdot \overrightarrow{CD} = -2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AE} = L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - 2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_3) \\ L_1 \cdot \sin(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 \end{pmatrix}_{(B_0)}$$

Q3. Vérification des exigences (id 1.2.1.1) et (id 1.2.1.2) sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm].

Sur l'intervalle considéré :

- Sur la figure 6.(a) on relève que XE varie de 100 mm, ce qui est supérieur à 50 mm la valeur exigée pour l'amplitude de déplacement (id 1.2.1.1) ;
- Sur la figure 6.(b) on relève que l'amplitude en Y est $Y_E \text{ max} - Y_E \text{ min} = -100,00 \text{ mm} + 100,25 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$ ce qui est inférieur à 0,5 mm la valeur maximale admissible par l'exigence de mouvement rectiligne (id 1.2.1.2) ;
- Sur la figure 6.(b) on relève le taux de variation $-2\% < \frac{dY_E}{dX_E} \leq 2\%$ ce qui vérifie

l'exigence de mouvement rectiligne (id 1.2.1.2).

Ainsi le déplacement du point E est compatible avec les exigences (id 1.2.1.1) et (id 1.2.1.2) sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm].

Q4. Vérification de l'exigence (id 1.2.1.3) sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm].

L'exigence considérée spécifie que la relation entre des déplacements doit être linéaire à 99%.

Si la grandeur associée au déplacement du bouton de commande est clairement identifiable (c'est XE), celle associée au capteur de position est plus floue. En supposant que le capteur de position soit un capteur angulaire intercalé entre le bâti (0) et la barre (1), il s'agit alors de θ_1 . Ce choix est conforté par la figure 8 donnant les évolutions de XE en fonction de θ_1 .

Pour vérifier l'exigence sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm], on propose d'exploiter les valeurs visibles sur le zoom donné figure 8(b) pour tracer une courbe avec un tableur. Le coefficient de corrélation de la régression linéaire devra être supérieur à 0,99 pour vérifier l'exigence.

II.2.2 Mesure de l'écart entre les performances statiques souhaitées et simulées**Q5.**

La modélisation plane permet d'écrire :

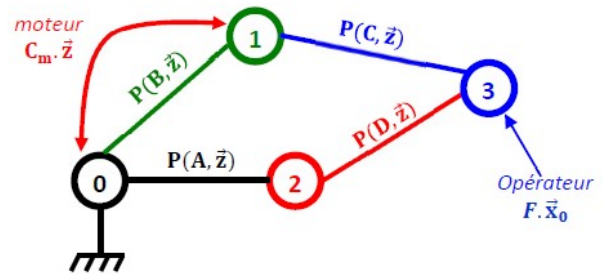
$$\{T_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{02} & - \\ Y_{02} & - \\ A & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \text{et} \quad \{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & - \\ Y_{32} & - \\ D & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

Le solide 2 étant soumis à 2 glisseurs, à l'équilibre :

$$\vec{R}_{0 \rightarrow 2} = -\vec{R}_{3 \rightarrow 2} = R_{02} \cdot \vec{x}_2$$

car (AD) support de ces 2 glisseurs colinéaire à $\vec{x}_2$

Graphes d'analyse :



Stratégie d'isolement :

Étape	Isolement	Théorème	Projection	Résultat
1	3	TMS en C	Sur $\vec{z}$	$R_{02} = f(F)$
2	1+3	TMS en B	Sur $\vec{z}$	$C_m = f(R_{02}, F)$

Étape 1 : On isole 3 et on applique le TMS en C en projection sur $\vec{z}$

BAME :

$$\{T_{0p \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} F \cdot \vec{x}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_E \quad \{T_{1 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{13} & - \\ Y_{13} & - \\ C & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} = R_{02} \cdot \vec{x}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}_D$$

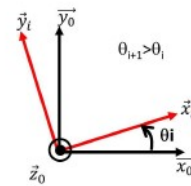
modélisation plane ($\vec{x}, \vec{y}$)

TMS en C. $\vec{z}$:

$$(\overline{CE} \wedge F \cdot \vec{x}_0 + \overline{CD} \wedge R_{02} \cdot \vec{x}_2) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\text{D'où} \quad (-2L_2 \cdot \vec{x}_3 \wedge F \cdot \vec{x}_0 - L_2 \cdot \vec{x}_3 \wedge R_{02} \cdot \vec{x}_2) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\text{Soit} \quad R_{02} = -\frac{2F \sin \theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \quad (1)$$



Étape 2 : On isole 1+3 et on applique le TMS en B en projection sur $\vec{z}$

BAME :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ C_m \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_B \quad \{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ B & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \{T_{0p \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} F \cdot \vec{x}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_E \quad \{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} R_{02} \cdot \vec{x}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}_D$$

TMS en B. $\vec{z}$:

$$C_m + (\overline{BE} \wedge F \cdot \vec{x}_0 + \overline{BD} \wedge R_{02} \cdot \vec{x}_2) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\text{D'où} \quad C_m + ((L_1 \cdot \vec{x}_1 - 2L_2 \cdot \vec{x}_3) \wedge F \cdot \vec{x}_0 + (L_1 \cdot \vec{x}_1 - L_2 \cdot \vec{x}_3) \wedge R_{02} \cdot \vec{x}_2) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\text{On a donc} \quad C_m + F(-L_1 \sin \theta_1 + 2L_2 \sin \theta_3) + R_{02}(L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + L_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)) = 0 \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$C_m + F(-L_1 \sin \theta_1 + 2L_2 \sin \theta_3) - \frac{2F \sin \theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} (L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + L_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)) = 0$$

Soit

$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)} [\sin \theta_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) - 2 \sin \theta_3 \sin(\theta_2 - \theta_1)]$$

Ou encore la forme attendue dans le sujet :

$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)} [\sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3]$$

Q6. Validité de l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2)

L'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) impose d'avoir le ratio couple/effort constant à +/-1%.

Le zoom de la figure 9(b) donne $\left(\frac{C}{F}\right)_{\max} = 33,375 \text{ mm}$

Cette valeur max doit correspondre à la valeur moyenne plus 1%,

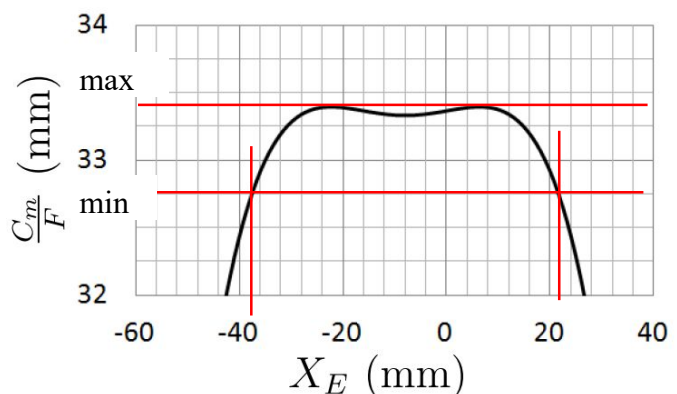
$$\text{d'où } \left(\frac{C}{F}\right)_{\max} = 1,01 \times \left(\frac{C}{F}\right)_{\text{moy}} \Leftrightarrow 1\% = \left(\frac{C}{F}\right)_{\max} \times \frac{1}{101} = \frac{33,375 \text{ mm}}{101} = 0,330 \text{ mm}.$$

Par suite on doit avoir $\left(\frac{C}{F}\right)_{\min} = \left(\frac{C}{F}\right)_{\max} - 2\% = 33,375 - 0,66 = 32,715 \text{ mm}.$

Cette condition est vérifiée pour XE dans l'intervalle $[-38 \text{ mm}, +22 \text{ mm}]$ (voir construction sur la figure 9.b ci-contre).

Alors la course est de 60 mm et supérieure aux 50 mm exigés par l'exigence amplitude de déplacement (id 1.2.1.1).

De plus, cet intervalle étant compris dans l'intervalle $[-60 \text{ mm}, +40 \text{ mm}]$, les exigences déjà vérifiées sur cet intervalle restent valables.



II.3 Modélisation du codeur optique

Q7. Satisfaction de l'exigence « Résolution mesure consigne » (id : 1.2.2.1)

Ce codeur délivre 4000 impulsions par tour (2 impulsions par fente et par capteur). Il a donc une résolution de $360^\circ/4000 = 0,09^\circ/\text{pt}$ de mesure.

La figure 8(b) nous donne le coefficient de proportionnalité :

$$\frac{\Delta X_E (\text{mm})}{\Delta \theta_1 (^\circ)} = \frac{38 - (-55)}{260 - 100} = \frac{93}{160} = 0,581 \text{ mm}/^\circ$$

Pour une rotation de $0,09^\circ$ du moteur correspond un déplacement du point E de :

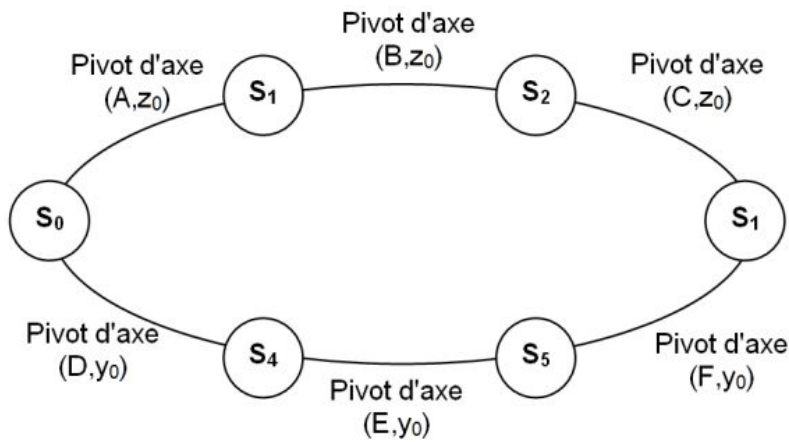
$$\Delta X_E (\text{mm}) = 0,581 \text{ mm}/^\circ \times 0,09^\circ = 0,052 \text{ mm}$$

Cette valeur est inférieure à 0,1 mm imposée par l'exigence (id : 1.2.2.1) qui est donc satisfaite.

III. Modélisation du manipulateur esclave

III.2 Modélisation de l'interface esclave

Q8. Graphe des liaisons du dispositif esclave.



Q9.

En considérant la chaîne de solides (0-1-2-3), on peut exprimer :

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \Big|_0 \quad \text{le point C ayant une réalité physique sur le solide 3.}$$

Soit

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \frac{d(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})}{dt} \Big|_0 = \frac{d(L_1 \overrightarrow{x_1} + L_2 \overrightarrow{x_2})}{dt} \Big|_0. \quad \text{Finalement } \overrightarrow{V_{C,3/0}} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{y_1} + L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}$$

Q10. Montrer que le mouvement de S3 /S0 ne peut être qu'une translation de direction $\overrightarrow{x_0}$.

En considérant cette fois la chaîne de solides (0-4-5), on peut exprimer :

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \Big|_0 = \frac{d(L_3 \overrightarrow{y_0} + x_s \overrightarrow{x_0})}{dt} \Big|_0 = \dot{x}_s \cdot \overrightarrow{x_0}$$

Le mouvement de 3/0 est donc une translation de direction $\overrightarrow{x_0}$.

Q11. NON TRAITÉE

Q12. Equation différentielle liant les paramètres.

$$\theta_1 \approx \alpha x_s \text{ donne } \dot{\theta}_1 \approx \alpha \cdot \dot{x}_s \text{ et } \ddot{\theta}_1 \approx \alpha \cdot \ddot{x}_s.$$

Par suite la relation issue du TEC s'écrit : $M_3 \cdot \dot{x}_s \cdot \ddot{x}_s + I_1 \cdot \alpha^2 \cdot \dot{x}_s \cdot \ddot{x}_s = Cm \cdot \alpha \cdot \dot{x}_s - f \cdot (\alpha \cdot \dot{x}_s)^2$

Pour $\dot{x}_s \neq 0$ cela donne $\boxed{(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) \ddot{x}_s + f \cdot \alpha^2 \cdot \dot{x}_s = Cm \cdot \alpha}$.

Q13. Fonction de transfert modélisant le comportement dynamique du manipulateur esclave

Dans les conditions de Heaviside, la transformée de Laplace de l'équation différentielle obtenue

est : $\boxed{[(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) p^2 + f \cdot \alpha^2 \cdot p] X_s(p) = Cm(p) \cdot \alpha}$

D'où la fonction de transfert demandée : $H(p) = \frac{Xs(p)}{Cm(p)} = \frac{\alpha}{(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2)p^2 + f \cdot \alpha^2 \cdot p}$

Ecrivons cette FT sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{\alpha}{p \cdot ((M_3 + I_1 \cdot \alpha^2)p + f \cdot \alpha^2)} = \frac{\alpha}{p \cdot f \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2)}{f \cdot \alpha^2} \cdot p + 1 \right)}$$

Finalement $H(p) = \frac{\frac{1}{f \cdot \alpha}}{p \cdot \left(\frac{(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2)}{f \cdot \alpha^2} \cdot p + 1 \right)}$. AN : $H(p) = \frac{20,8}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1)}$

IV. Réalisation de la commande de l'esclave

IV.1 Modélisation de l'environnement

Q14. Modèle de l'effort de pénétration d'une aiguille dans un tissu.

Il faut considérer la figure 15, et la fin de la phase d'insertion. Compte-tenu de ce qui est demandé (relation linéaire), on va retenir la phase entre les instants t_1 et t_2 sur l'extrait de la figure 15 ci-contre.

Durant cette phase, les grandeurs f_e et x_e ont toutes deux une évolution linéaire. De plus $x_e=0$ quand $f_e=0$.

Par suite on peut écrire : $f_e(t) = k_e \times x_e(t)$.

Évaluons k_e sur la phase considérée : $k_e = \frac{\Delta f_e(t)}{\Delta x_e(t)} = \frac{f_e(t_2) - f_e(t_1)}{x_e(t_2) - x_e(t_1)}$

AN : $k_e = \frac{0,5 - 0,05}{0,028 - 0,02} = \frac{0,45}{0,008} = 56 \text{ N/m}$.

Q15. Modélisation du déplacement par une fonction sinus à partir de la figure 16.

L'évolution de $x_e(t)$ est périodique et apparemment sans discontinuité de tangente. On peut donc la modéliser par une sinusoïde. On relève sa période $T = 4,25\text{s}$ environ.

Son amplitude est $\Delta x_e = 0 \text{ mm} - (-10) \text{ mm} = +10 \text{ mm}$

Sa valeur moyenne est non nulle et on relève $x_{e0} = -5 \text{ mm}$.

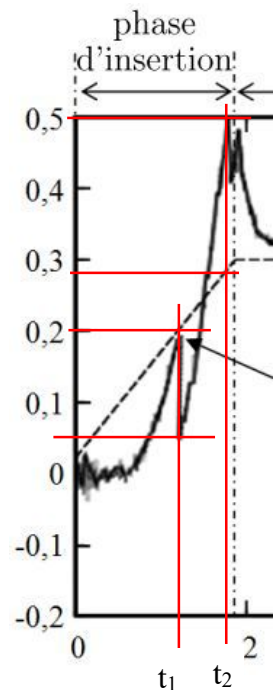
Enfin $x_e(0) \neq x_{e0}$ donc la fonction sinus possède une phase non nulle à l'origine.

D'où l'expression de la fonction $x_e(t) = x_{e0} + \frac{\Delta x_e}{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

En remplaçant par les valeurs numériques de déplacement, et $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ il vient :

$$x_e(t) = -5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot [-1 + \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)]. \text{ CQFD.}$$

On identifie $A = 5 \text{ mm}$ et $f = \frac{1}{T} \approx 0,24 \text{ Hz}$.



Finalement $f_e(t) = k_e \times x_e(t) = 0,28 \left[-1 + \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{4,25} + \varphi \right) \right]$.

Q16. Réglage de la valeur du produit RC du filtre passe-bas.

Le filtre passe-bas RC a pour constante de temps $\tau = RC$.

Sa pulsation propre est $\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$, d'où la fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot RC}$.

On impose $f_0 = \frac{f_{ech}}{2}$ d'où finalement $\frac{f_{ech}}{2} = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \Leftrightarrow RC = \frac{1}{\pi \cdot f_{ech}}$. AN : $RC = \frac{1}{50 \cdot \pi} = 6,37 \text{ ms}$.

Q17. Nombre de bits N nécessaires pour avoir la précision demandée.

Le codage numérique d'une grandeur analogique génère une erreur potentielle majorée par la précision du codage, c'est-à-dire sa résolution : $erreur \leq \frac{\text{Amplitude de mesure}}{\text{Nombre de points de codage}}$.

Ainsi avec une amplitude $A=5V$ et un codage sur N bits on aura : $erreur \leq \frac{A}{2^N}$.

En imposant une erreur maximale de 0,005 V cela donne : $0,005 \geq \frac{5}{2^N} \Leftrightarrow 2^N \geq \frac{5}{0,005} = 1000$

D'où finalement $N \geq \frac{\ln(1000)}{\ln(2)} = 9,96$ soit N = 10 bits.

IV.2 Modélisation et étude des performances du système sans correction

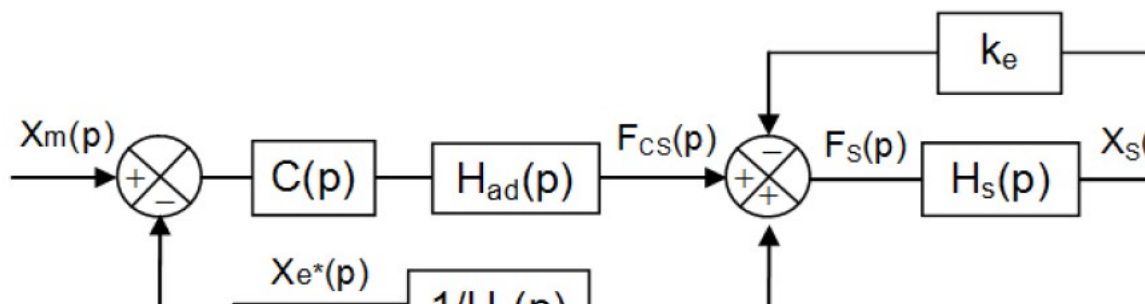
Q18. Simplification du schéma-bloc de la figure 19.

Il est possible d'utiliser une méthode algébrique s'appuyant sur les relations issues des schémas-bloc initial (figure 19) et final (figure 20).

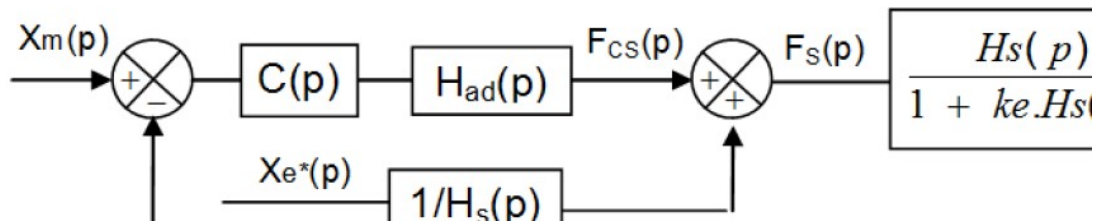
Nous présentons ici une méthode s'appuyant sur l'algèbre des schéma-bloc.

Les schémas ci-dessous sont les différentes étapes des modifications conduisant du schéma de la figure 19 à celui de la figure 20.

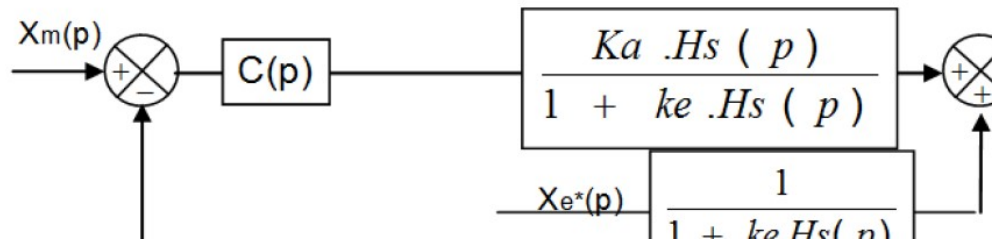
Tout d'abord on décale l'intervention de $X_e(p)$ en amont pour le sortir de la boucle interne.



La FTBF de la boucle interne est alors : $\frac{X_v(p)}{F_{cs}(p)} = \frac{H_s(p)}{1 + k_e \cdot H_s(p)}$, d'où le schéma-bloc suivant.



On décale ensuite l'intervention en aval de la FT calculée pour obtenir le schéma-bloc final identique à la forme demandée.



On identifie finalement : $H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$ et $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$.

IV.3 Vérification des exigences sans correction : $C(p) = 1$

Q19. FTBF sans perturbation

$$F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)} = \frac{C(p).H(p)}{1 + C(p).H(p)} = \frac{1}{\frac{1}{C(p).H(p)} + 1} \text{ avec } C(p)=1 \text{ et } H(p) = \frac{1}{m_s.p^2 + b_s.p + k_e} ;$$

$$F_{BF1}(p) = \frac{1}{m_s.p^2 + b_s.p + k_e + 1} \text{ On reconnaît une FT du 2^{ème} ordre.}$$

Ecrivons cette FT sous forme canonique :
$$F_{BF1}(p) = \frac{\frac{1}{1+k_e}}{\frac{m_s}{1+k_e}.p^2 + \frac{b_s}{1+k_e}.p + 1}$$

D'où ses paramètres caractéristiques : gain statique $K = \frac{1}{1+k_e} = 0,005 \text{ su}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m_s}{1+k_e} \\ \frac{2z}{\omega_0} = \frac{b_s}{1+k_e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{1+k_e}{m_s}} = 36,4 \text{ rad/s} \\ z = \frac{\omega_0}{2} \frac{b_s}{1+k_e} = \frac{b_s}{2 \cdot \sqrt{m_s \cdot (1+k_e)}} = 0,13 \text{ su} \end{cases} \text{ NB : « su » pour sans unité ;}$$

Q20. Vérification des exigences stabilité (amortissement), rapidité et précision.

- La FT a un coefficient d'amortissement $z=0,13 < 1$, donc la réponse indicielle présentera un dépassement transitoire. L'exigence de stabilité (amortissement) n'est donc pas vérifiée.
- L'exigence rapidité impose un temps de réponse à 5% max pour un échelon de 0,1 s. Pour $z=0,13$ l'abaque du temps de réponse réduit figure 21.a donne $tr_{5\%} \cdot \omega_0 > 20$.

Ainsi $tr_{5\%} > \frac{20}{\omega_0}$, or $\omega_0 = 36,4 \text{ rad/s}$ d'où $tr_{5\%} > 0,55 \text{ s}$.

L'exigence de rapidité n'est donc pas vérifiée.

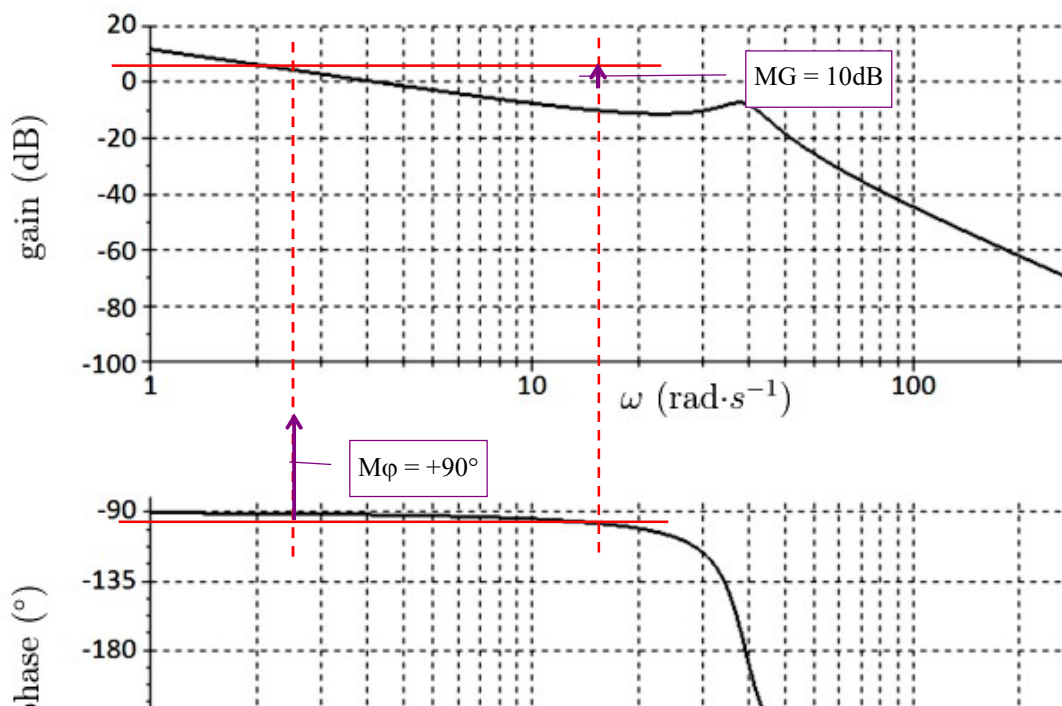
- L'exigence de précision impose une erreur statique max relative à un échelon de 1%.
La FT ayant un gain statique K on aura en régime permanent (statique) : $\Delta s = K \cdot \Delta e$,
d'où une erreur statique relative : $\frac{\Delta e - \Delta s}{\Delta e} = 1 - \frac{\Delta s}{\Delta e} = 1 - K$.

Avec $K=0,005$ on obtient une erreur de 0,995 bien supérieur à $1\%=0,01$.
L'exigence de précision n'est donc pas vérifiée.

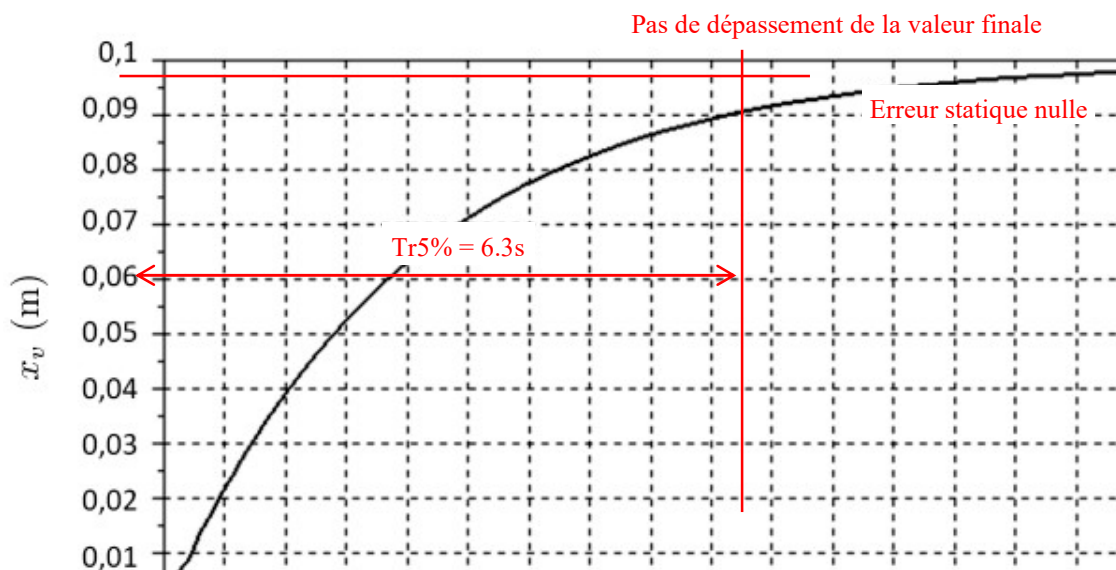
IV.4 Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale

Q21. Vérification des exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (erreur statique).

DR Q21a : Diagramme de Bode de la FTBO ouverte pour $K_i = 100$.



DR Q21b : Réponse temporelle de la FTBF pour un échelon de 10 cm et $K_i = 100$.



Les résultats issus de relevés sur les DR21a et 21b sont portés dans le tableau DR1 reproduit ci-contre.

Ils permettent de vérifier les exigences demandées.

Nous proposons un DR1 enrichi qui aurait permis d'apporter une réponse plus synthétique.

Temps de réponse à 5%	6.3s
Amplitude du 1 ^{er} dépassement	0
Erreur statique	0
Marge de phase	+90°
Marge de Gain	+10dB

Exigence	Critère	Niveau relevé	Niveau demandé	Satisfaction
Stabilité	Marge de phase	+90°	$\geq 45^\circ$	OUI
Stabilité	Marge de Gain	+10dB	$\geq 7,5\text{dB}$	OUI
Stabilité	Amplitude du 1 ^{er} dépassement	0	Aucun	OUI
Précision	Erreur statique	0	$\leq 1\%$	OUI
Rapidité	Temps de réponse à 5%	6,3s	$\leq 0,1\text{s}$	NON

On peut conclure que les exigences de stabilité et précision sont satisfaites, mais qu'il faut améliorer la rapidité du système. C'est justement l'objet des questions suivantes.

Q22. Valeur maximale de K_i qui permet de respecter les marges de stabilité.

Avec $K_i=100$ on a relevé $MG = +10\text{dB}$

On cherche K_{imax} tel que $MG = +7,5\text{dB}$

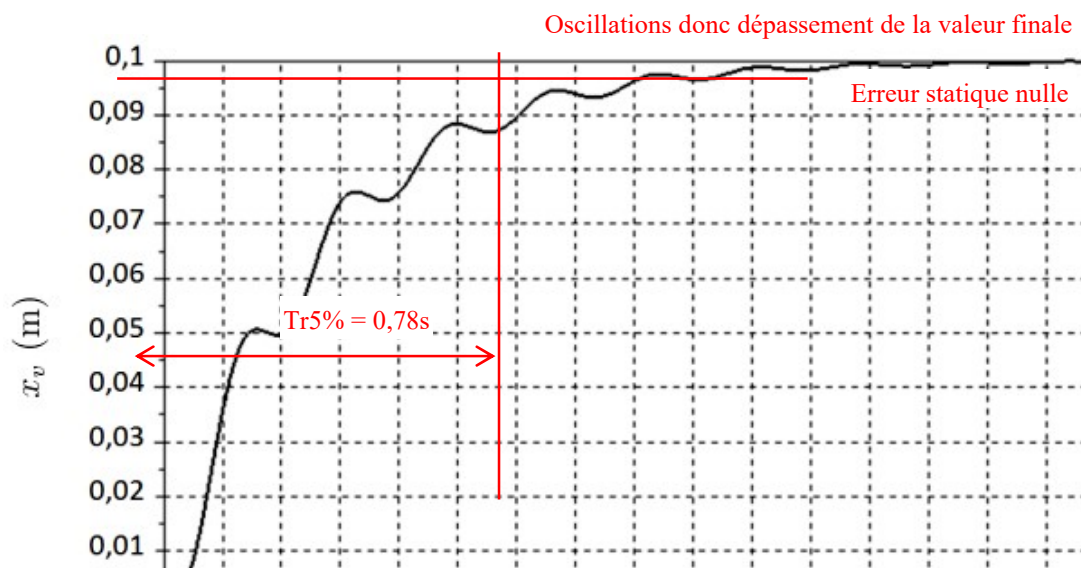
Passer de $K_i=100$ à K_{imax} doit donc remonter le gain de 2,5 dB.

Posons $K_i \text{ max} = a.K_i$, alors on aura $20\log(a)=2,5\text{dB}$ soit $a = 10^{\frac{2,5}{20}} = 1,33$.

Ainsi on obtient $K_i \text{ max} = 133$. La marge de phase reste très proche de +90°

Q23. Capacité du correcteur à valider simultanément les exigences « stabilité » et « rapidité »

DR23 : Réponse temporelle de la FTBF pour un échelon de 10 cm avec le réglage $K_i \text{ max}$.



Les résultats issus de relevés sur le DR32 ci-dessus sont portés dans le tableau DR2 reproduit ci-contre.

Temps de réponse à 5%	0,78s
Amplitude du 1 ^{er} dépassement	0+
Erreur statique	0

Conclusion pour K_i max :

- $Tr5\% = 0,78s > 0,1s$ donc la rapidité n'est pas satisfaite.
- la réponse temporelle devient oscillante, donc il y aura dépassement de la valeur finale ; la stabilité n'est pas satisfaisante.
- L'erreur statique est bien nulle.

Ce correcteur ne permet pas de vérifier simultanément la nécessaire stabilité et la rapidité demandée.

Q24. Le cahier des charges impose une atténuation minimale telle que $G(\omega) \leq \frac{1}{100}$ soit $GdB(\omega) \leq -20 \cdot \text{Log}[100] = -40dB$.

Q25. Validation de l'exigence « précision » pour le critère d'atténuation avec K_{imax} .

Le gain $G(\omega) = |H(j\omega)|$ est le rapport des amplitudes des signaux sortie/entrée.

$$GdB(\omega) = 20 \cdot \text{Log}[G(\omega)]$$

Sur l'intervalle de pulsation considéré, le gain maximal est $GdB_{\max} = -30dB$.

Or on exige une atténuation minimale telle que $G(\omega) \leq \frac{1}{100}$ soit $GdB(\omega) \leq -20 \cdot \text{Log}[100] = -40dB$.

$GdB_{\max} = -30dB \geq -40dB$ donc le critère de l'atténuation n'est pas vérifié.

IV.5 Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Q26. Valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

On considère $A(p)$ la fonction de transfert relative à l'entrée (ou transmittance pour les puristes).

C'est un FT du 2^{ème} ordre dont le $tr5\%$ est lié à la pulsation propre ω_0 et au coefficient d'amortissement z par l'abaque du temps de réponse réduit donné figure 21.a.

$$A(p) = \frac{1}{(1+T.p)^2} = \frac{1}{1+2.T.p+(T.p)^2}.$$

On peut donc identifier : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_0^2} = T^2 \\ \frac{2z}{\omega_0} = 2T \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{T} \\ z = \frac{\omega_0}{2} \cdot 2T = \frac{2T}{2T} = 1 \text{ su} \end{array} \right.$

Pour $z=1$ l'abaque du temps de réponse réduit figure 21.a donne $tr5\% \cdot \omega_0 \approx 5$, c'est-à-dire $tr5\% \approx 5.T$ Ainsi il faut diminuer T pour diminuer le $tr5$.

Pour avoir $tr5\% \leq 0,1s$ on doit avoir $5T \leq 0,1s$ soit $T \leq 0,02s$

Q27. Idem Q24

Q28. Valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur l'intervalle $[1,25 \text{ rad/s} ; 12,5 \text{ rad/s}]$

Pour cela on dispose du DR3 qui donne le diagramme de Bode de $B(p)$ la transmittance relative à la

perturbation pour $T=1s$. On donne $B(p) = \frac{T.p.(2+T.p)}{(1+T.p)^2}$.

On observe sur le DR3 deux zones :

Pour $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{T}$ soit $T\omega \ll 1$, un gain avec une pente de +20dB par décade, et une phase qui tend vers $+90^\circ$, ce qui correspond à un dérivateur et est confirmé par l'équivalent :

$$B(p) = \frac{T.p.(2+T.p)}{(1+T.p)^2} \approx \frac{2.T.p}{1}.$$

Pour $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{T}$ soit $T\omega \gg 1$, un gain nul et une phase qui tend vers 0° , ce qui correspond à un gain unitaire et est confirmé par l'équivalent : $B(p) = \frac{T.p.(2+T.p)}{(1+T.p)^2} \approx \frac{(T.p)^2}{(T.p)^2} = 1.$

Par suite il ne peut y avoir d'atténuation que pour les pulsations $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{T}$, c'est-à-dire que l'on considère la partie avec un gain de pente +20dB/décade.

On a déjà vu que l'atténuation est minimale quand le gain est maximal.

L'exigence spécifie une atténuation de 1/100, soit $GdB \leq -40dB$.

On doit donc avoir $GdB(12,5rad/s) \leq -40dB$.

Réponse approchée à partir de considérations graphiques sur le DR3 :

Il faut décaler la cassure en $1/T$ vers la droite jusqu'à obtenir $GdB(12,5rad/s) \leq -40dB$.

En approchant 12,5 rad/s à 10 rad/s on aurait $\omega_0 = \frac{1}{T} = 10\,000\,rad/s$ soit $T_{max} = 10^{-4}\,s = 0,1\,ms$.

Réponse à partir du calcul analytique

On doit avoir $|B(j.\omega_2)| \leq \frac{1}{100}$ avec $\omega_2 = 12,5\,rad/s$;

$$|B(j.\omega_2)| = \frac{|T.j.\omega_2| \cdot |2+T.j.\omega_2|}{|1+T.j.\omega_2|^2} = \frac{T.\omega_2 \cdot \sqrt{4+(T.\omega_2)^2}}{1+(T.\omega_2)^2}.$$

Une résolution numérique donne $T_{max} = 4,00.10^{-4}\,s = 0,4\,ms$

Variante analytique

La résolution de $|B(j.\omega_2)| \leq \frac{1}{100}$ pour $\omega_2 = 12,5\,rad/s$ avec la fonction équivalente aux basses fréquences $B(p) \approx 2.T.p$ donne le même résultat, mais plus simplement :

$$2.T \times 12,5 \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow 25.T \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow T \leq \frac{1}{2500} = 0,4\,ms.$$