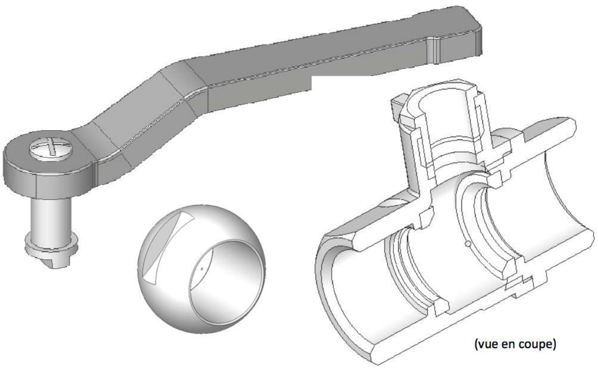
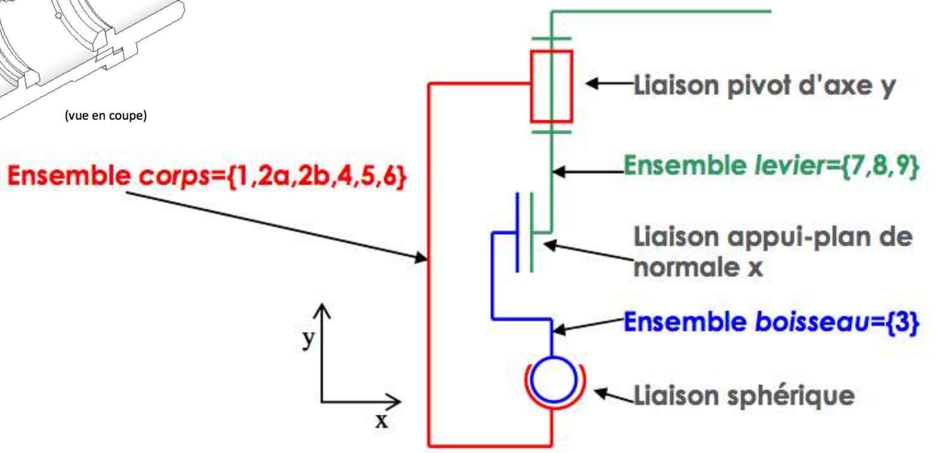
Représenter les Mouvements dans les Systèmes

MP2I / PCSI

Travaux Dirigés n°5 : CORRIGÉ
Graphe des liaisons / Schémas cinématiques / Lois ES

Exercice 1 : ***Vanne à boisseau***





Exercice 2 : ***Barrière Sinusmatic***

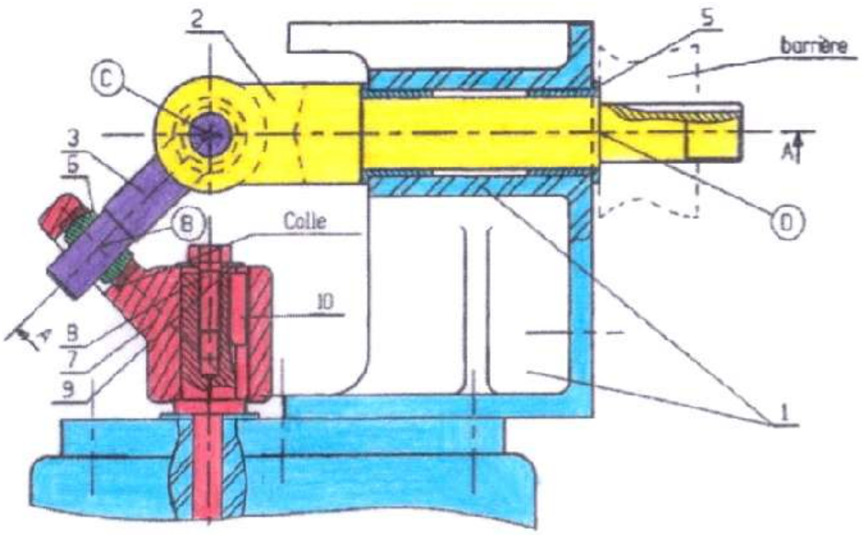
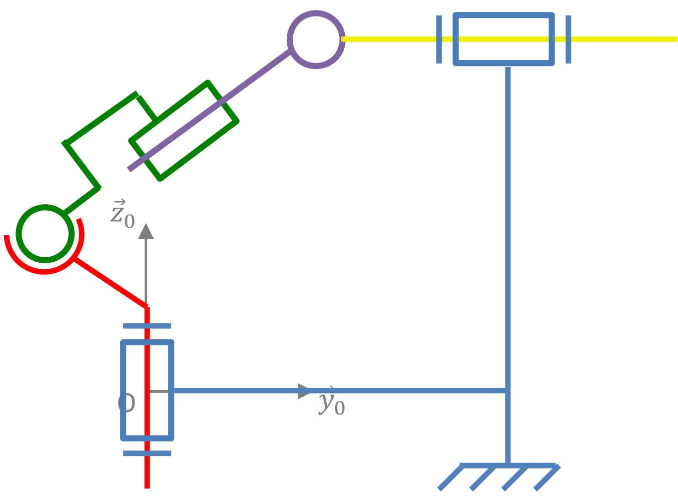
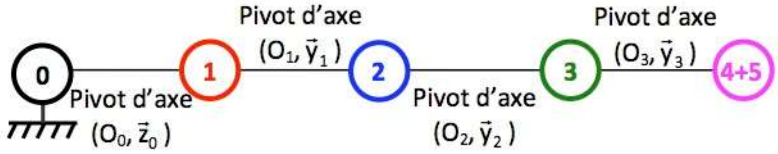


Schéma cinématique 2D dans le plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ pour $\vec{x}_0 = \vec{x}_4$:

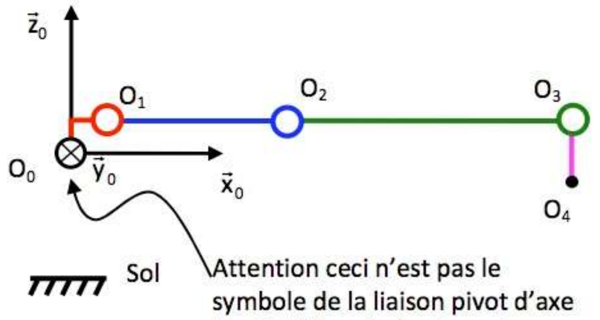


Exercice 3 : ***Bras manipulateur du robot Spirit***

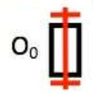
Q.1.



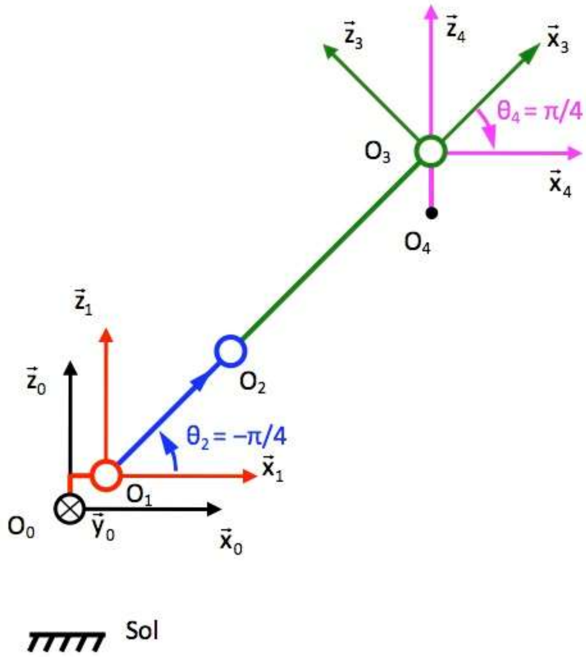
Q.2. Position P_h : $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ et $\theta_3 = 0$.



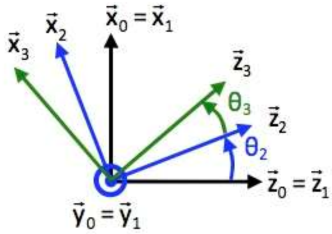
Attention ceci n'est pas le symbole de la liaison pivot d'axe $(O_0, \vec{z}_0)$!!! on la dessinerait comme ceci dans ce plan :



Position P_v : $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\pi/4$ et $\theta_3 = 0$.



Q.3. Pour la position P_i, on a $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$.



→ $\overrightarrow{O_0O_3} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} = a_1.\vec{x}_1 + c_1.\vec{z}_1 + a_2.\vec{x}_2 + a_3.\vec{x}_3$

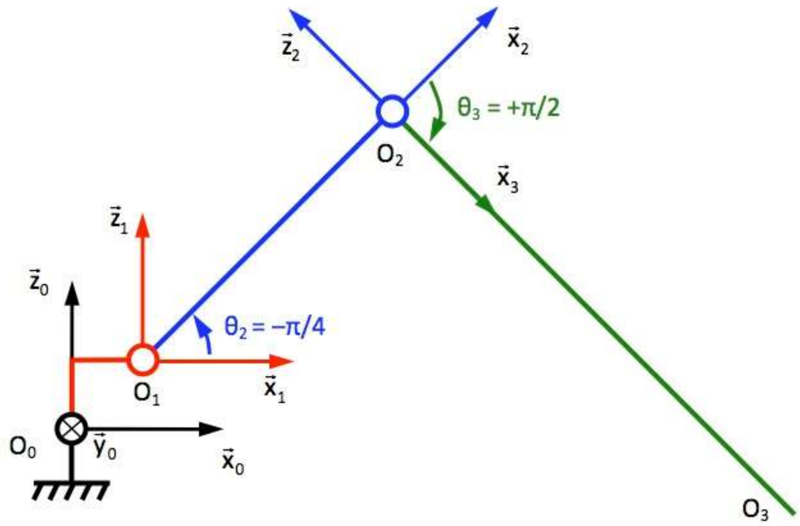
Avec $\vec{x}_2 = -\sin\theta_2.\vec{z}_0 + \cos\theta_2.\vec{x}_0$

et $\vec{x}_3 = -\sin(\theta_2 + \theta_3).\vec{z}_0 + \cos(\theta_2 + \theta_3).\vec{x}_0$

$$\boxed{\overrightarrow{O_0O_3} = \left|\begin{array}{l} a_1 + a_2.\cos\theta_2 + a_3.\cos(\theta_2+\theta_3) \\ 0 \\ c_1 - a_2.\sin\theta_2 - a_3.\sin(\theta_2+\theta_3) \end{array}\right._{0}}$$

$$\text{A.N. : } \overrightarrow{O_0O_3} = \left|\begin{array}{l} 0{,}1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.(0{,}5 + 0{,}8) \\ 0 \\ 0{,}1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.(0{,}5 - 0{,}8) \end{array}\right._{0}$$

→ $\boxed{\overrightarrow{O_0O_3} = 1{,}02.\vec{x}_0 - 0{,}11.\vec{z}_0}$



Q.4. Calcul de la hauteur maximale d'étude de la roche par rapport au sol.

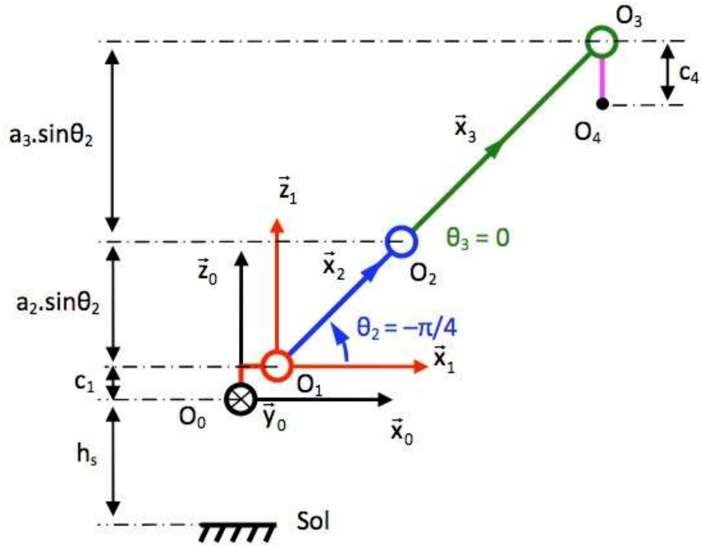
On a : $-\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2$
$-\pi/4 \le \theta_2 \le \pi/4$
$0 \le \theta_3 \le \pi$
et O_3O_4 doit être vertical tel que $(\vec{z}_0, \vec{z}_4) = 0$.

$\boxed{h_{maxi} = h_s + c_1 + (a_2 + a_3).\sin\theta_2 - c_4}$

A.N. :

$h_{maxi} = 0{,}5 + 0{,}1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.(0{,}5 + 0{,}8) - 0{,}15$

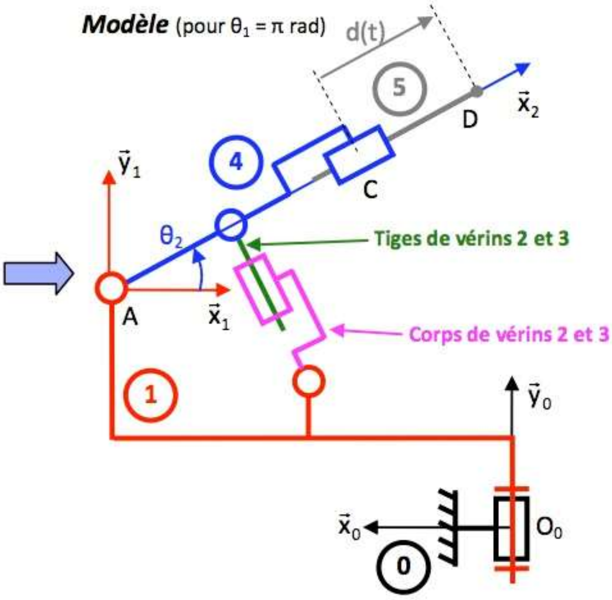
$\boxed{h_{maxi} = 1{,}37\ m}$ → C.d.C.F. ok.

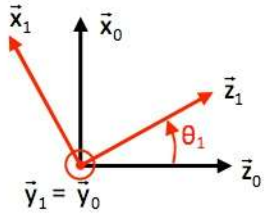


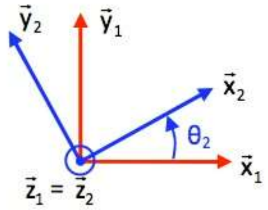
Exercice 4 : ***Echelle Pivotante Automatique***

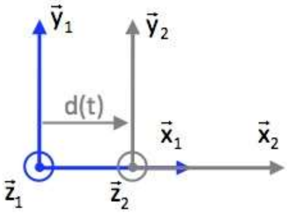
Q.1. et **Q.2.**

Réel









Q.3. $\overrightarrow{O_0D} = \overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = -b.\vec{x}_1 + a.\vec{y}_1 + c.\vec{x}_2 + d(t).\vec{x}_2$ avec :

$\vec{x}_1 = -\sin\theta_1.\vec{z}_0 + \cos\theta_1.\vec{x}_0$

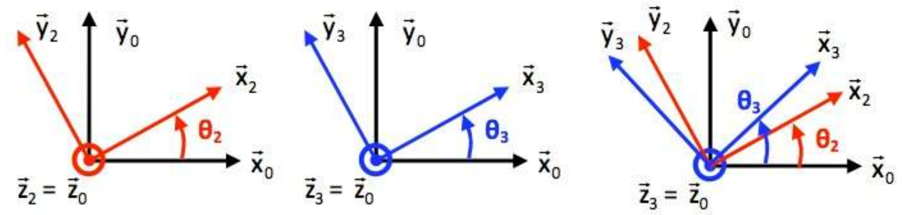
$\vec{y}_1 = \vec{y}_0$

$\vec{x}_2 = \cos\theta_2.\vec{x}_1 + \sin\theta_2.\vec{y}_1$

$$\rightarrow \overrightarrow{O_0D} = -b.(-\sin\theta_1.\vec{z}_0 + \cos\theta_1.\vec{x}_0) + a.\vec{y}_0 + (c+d(t)).(\cos\theta_2.\vec{x}_1 + \sin\theta_2.\vec{y}_1) = \left|\begin{array}{l} -b.\cos\theta_1 + (c+d(t)).\cos\theta_2.\cos\theta_1 \\ a + (c+d(t)).\sin\theta_2 \\ b.\sin\theta_1 - (c+d(t)).\cos\theta_2.\sin\theta_1 \end{array}\right._{b0}$$

Exercice 5 : ***Palettiseur pour l'industrie laitière***

Q.1.



Q.2. $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0} \rightarrow L_1.\vec{x}_0 + \mu.\vec{x}_3 - R.\vec{x}_2 = \vec{0}$

$\rightarrow L_1.\cos\theta_3.\vec{x}_3 - L_1.\sin\theta_3\vec{y}_3 + \mu.\vec{x}_3 - R.\cos(\theta_3 - \theta_2).\vec{x}_3 + R.\sin(\theta_3 - \theta_2).\vec{y}_3 = \vec{0}$

En projection dans la base 3 $\rightarrow \boxed{\begin{cases} L_1.\cos\theta_3 + \mu - R.\cos(\theta_3 - \theta_2) = 0 \\ -L_1.\sin\theta_3 + R.\sin(\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{cases}}$

Q.3. $\overrightarrow{HH} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \vec{0} \rightarrow L.\vec{x}_0 + \lambda.\vec{x}_3 + y.\vec{y}_0 = \vec{0}$

$\rightarrow L.\cos\theta_3.\vec{x}_3 - L.\sin\theta_3\vec{y}_3 + \lambda.\vec{x}_3 + y.\sin\theta_3.\vec{x}_3 + y.\cos\theta_3.\vec{y}_3 = \vec{0}$

En projection dans la base 3 $\rightarrow \boxed{\begin{cases} L.\cos\theta_3 + \lambda + y.\sin\theta_3 = 0 \\ -L.\sin\theta_3 + y.\cos\theta_3 = 0 \end{cases}}$

Q.4. On réécrit les équations des fermetures géométriques précédentes mais cette fois ci en projection sur la base 0.

En projection dans la base 0 $\rightarrow \begin{cases} L_1 + \mu.\cos\theta_3 - R.\cos\theta_2 = 0 \\ \mu.\sin\theta_3 - R.\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\theta_3 = \dfrac{R.\cos\theta_2 - L_1}{\mu} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{R.\sin\theta_2}{\mu} \end{cases} \rightarrow \tan\theta_3 = \dfrac{R.\sin\theta_2}{R.\cos\theta_2 - L_1}$

En projection dans la base 0 $\rightarrow \begin{cases} L + \lambda.\cos\theta_3 = 0 \\ \lambda.\sin\theta_3 + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\theta_3 = -\dfrac{L}{\lambda} \\ \sin\theta_3 = -\dfrac{y}{\lambda} \end{cases} \rightarrow \tan\theta_3 = \dfrac{y}{L}$

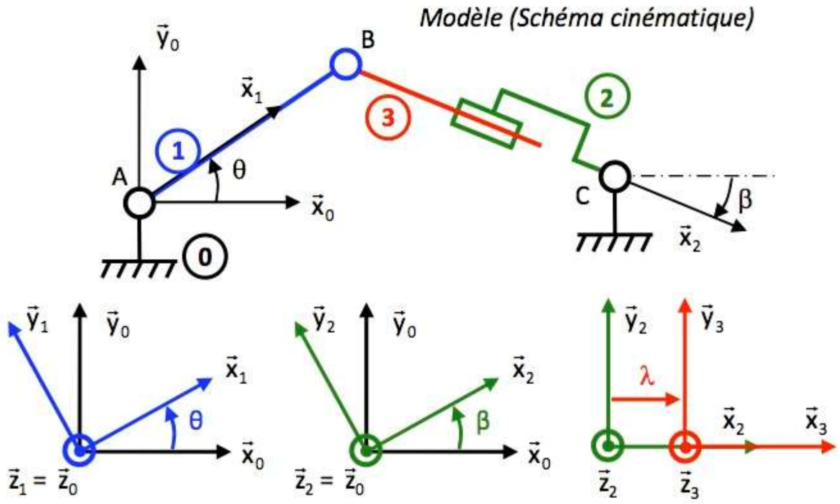
Soit $\dfrac{y}{L} = \dfrac{R.\sin\theta_2}{R.\cos\theta_2 - L_1} \rightarrow \boxed{y = L.\dfrac{R.\sin\theta_2}{R.\cos\theta_2 - L_1}}$

Q.5. La position extrême haute ou basse est obtenue lorsque $\vec{x}_3$ est perpendiculaire à $\vec{x}_2$, ce qui correspond à $\theta_2 \approx \pm 53{,}1°$. Le débattement est $\boxed{\Delta y = 2.L.\dfrac{R.\sin\theta_2}{R.\cos\theta_2 - L_1}}$

Q.6. $\Delta y = 2.L.\dfrac{R.\sin\theta_2}{R.\cos\theta_2 - L_1} = 2 \times 0{,}5 \times \dfrac{0{,}15.\sin 53{,}1}{0{,}15.\cos 53{,}1 - 0{,}25} = 0{,}75$ m soit 75 cm $\rightarrow$ CdCF ok.

Exercice 6 : ***Benne de camion***

Q.1.



Q.2. $\boxed{Q = V.S}$ avec S surface du piston telle que $S=\pi.\dfrac{d^2}{4}$ (d : diamètre du piston)

Q.3. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \rightarrow L.\vec{x}_1 + \lambda.\vec{x}_2 - x_C.\vec{x}_0 - y_C.\vec{y}_0 = \vec{0}$

En projection dans la base 0 $\rightarrow \boxed{\begin{cases} L.\cos\theta + \lambda.\cos\beta - x_C = 0 \\ L.\sin\theta + \lambda.\sin\beta - y_C = 0 \end{cases}}$

Q.4. $\begin{cases} L.\cos\theta + \lambda.\cos\beta - x_C = 0 \\ L.\sin\theta + \lambda.\sin\beta - y_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{x_C - L.\cos\theta}{\lambda} \\ \sin\beta = \dfrac{y_C - L.\sin\theta}{\lambda} \end{cases}$

$\rightarrow \left(\dfrac{x_C - L.\cos\theta}{\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{y_C - L.\sin\theta}{\lambda}\right)^2 = 1 \rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{(x_C - L.\cos\theta)^2 + (y_C - L.\sin\theta)^2}}$

Q.5. $\lambda = \sqrt{{x_C}^2 + {y_C}^2 + L^2 - 2.L.(x_C.\cos\theta + y_C.\sin\theta)} \rightarrow \dot{\lambda} = \dfrac{-\frac{1}{2}2.L.\left(-x_C.\dot{\theta}.\sin\theta + y_C.\dot{\theta}.\cos\theta\right)}{\sqrt{{x_C}^2 + {y_C}^2 + L^2 - 2.L.(x_C.\cos\theta + y_C.\sin\theta)}}$

On a $\dot{\lambda} = V \rightarrow \boxed{Q = S.\dfrac{-L.\left(-x_C.\dot{\theta}.\sin\theta + y_C.\dot{\theta}.\cos\theta\right)}{\sqrt{{x_C}^2 + {y_C}^2 + L^2 - 2.L.(x_C.\cos\theta + y_C.\sin\theta)}}}$

Q.6. $\dot{\theta}_{max} = 70.Q$ et $Q = 0{,}4$ L/s $\rightarrow Q = 0{,}4.10^{-3}$ m^3/s

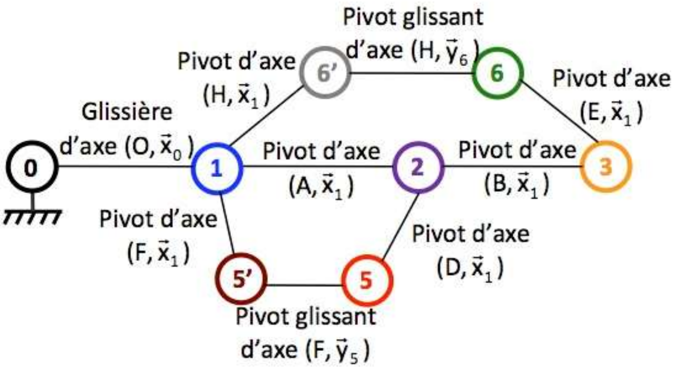
$\rightarrow \dot{\theta}_{max} = 70 \times 0{,}4.10^{-3} = 0{,}028$ rad/s $\rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{max} = 0{,}27 \text{ tr/min} < 0{,}5 \text{ tr/min} \rightarrow \text{C.d.C.F. ok.}}$

Exercice 7 : ***Treilleuse automatique pour vaches***

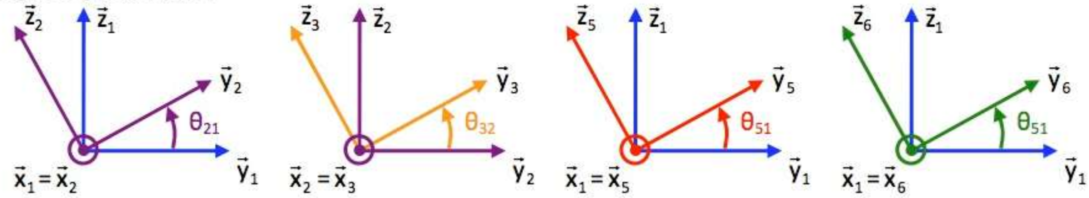
Q.1. Il y a 3 paramètres d'entrée sur ce modèle :

- $x(t)$ pour la translation suivant l'axe $(0, \vec{x}_0)$
- $L_5(t)$ pour la translation suivant l'axe $(F, \vec{y}_5)$
- $L_6(t)$ pour la translation suivant l'axe $(H, \vec{y}_6)$

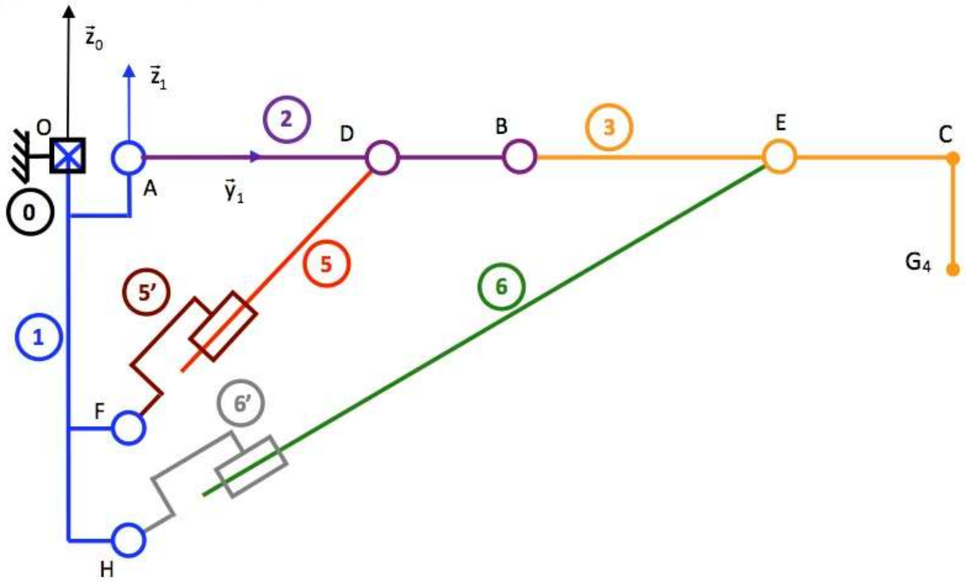
Q.2. Graphe des liaisons



Q.3. Figures géométrales



Q.4. Position bras 2 et 3 horizontaux.



Graphiquement on obtient $\boxed{\|\overrightarrow{HE}\| = 12 \text{ cm}}$ et $\boxed{\|\overrightarrow{FD}\| = 5{,}9 \text{ cm}}$.

Q.5. Fermeture géométrique AFD : $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA}$ $\rightarrow$ $\boxed{d_2.\vec{y}_2 - L_5(t).\vec{y}_5 + h_5.\vec{z}_0 = \vec{0}}$

Q.6. On projette dans B_0 : $\begin{cases} d_2.\cos\theta_{21} - L_5(t).\cos\theta_{51} = 0 \\ d_2.\sin\theta_{21} - L_5(t).\sin\theta_{51} + h_5 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} d_2.\cos\theta_{21} = L_5(t).\cos\theta_{51} \\ d_2.\sin\theta_{21} + h_5 = L_5(t).\sin\theta_{51} \end{cases}$ $\rightarrow$ $\boxed{L_5(t)^2 = d_2^{\,2}.\cos^2\theta_{21} + (d_2.\sin\theta_{21} + h_5)^2}$

Q.7. Modèle géométrique direct :

On a $\overrightarrow{OG_3} = x_{G4}.\vec{x}_0 + y_{G4}.\vec{y}_0 + z_{G4}.\vec{z}_0$ et $\overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG_4} = x(t).\vec{x}_0 + L_1.\vec{y}_1 + L_2.\vec{y}_2 - L_3.\vec{z}_3 - L_4.\vec{y}_3$

On projette dans B_0 : $\boxed{\begin{cases} x(t) = x_{G4} \\ L_1 + L_2.\cos\theta_{21} + L_3.\sin(\theta_{21} + \theta_{32}) - L_4.\cos(\theta_{21} + \theta_{32}) = y_{G4} \\ L_2.\sin\theta_{21} - L_3.\cos(\theta_{21} + \theta_{32}) - L_4.\sin(\theta_{21} + \theta_{32}) = z_{G4} \end{cases}}$