Déterminer les Caractéristiques du Mouvement

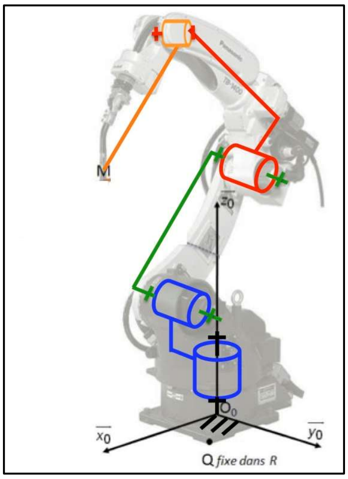
Vitesse/Accélération des solides en mouvement dans les systèmes

MPSI/PCSI

1. Introduction

1.1. Objectifs

ROBOT SOUDEUR TB 1400



modélisation cinématique

L'objectif de ce cours est de découvrir les démarches et les méthodes permettant de déterminer les **caractéristiques du mouvement** *(position, trajectoire, vitesse, accélération)* des **solides** (CEC) d'un système.

Le calcul de la vitesse trouve son utilité par exemple dans l'écriture d'une loi d'entrée sortie en vitesse de mécanisme (le chapitre précédent a permis d'établir des loi entrée sortie en position). L'accélération est une notion qui intervient dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique (programme de 2ème année) afin d'établir le lien entre le mouvement d'un système et les efforts qu'il subit.

1.2. Mouvement

Un mouvement est un **déplacement relatif d'un solide par rapport à un autre**, il met en jeu trois entités :

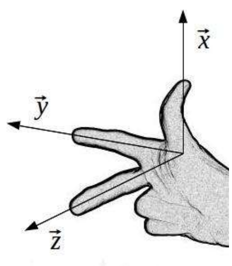
- **Le solide observé**,
- **Le solide de référence**,
- **Le temps**.

Notation : **le mouvement d'un solide S par rapport à un solide 0 est noté S/0.**

1.3. Repère, Référentiel

Au solide de référence est associé un repère orthonormé direct. Ce **repère de référence**, couplé à une **échelle de temps**, constitue le **référentiel du mouvement**.

NB : un **repère** est constitué d'**une base associée à une origine** qui est en général un point particulier du solide.



Dans la suite, on parlera indifféremment d'un solide ou du repère qui lui est associé.

2. Caractériser les mouvements d'un point d'un solide

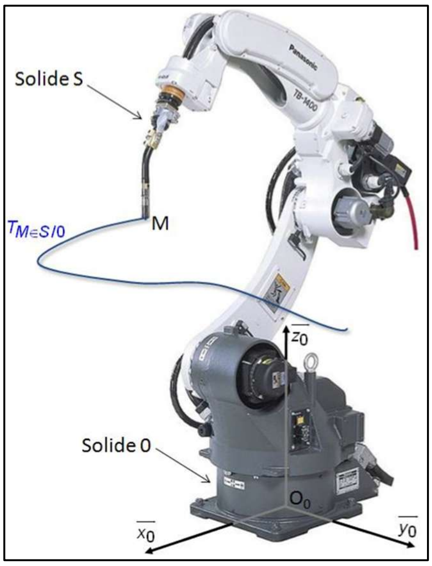
2.1. La trajectoire

La trajectoire d'un point appartenant à un solide, dans son mouvement par rapport à un autre solide, est le lieu des positions successives occupées par ce point au cours du temps dans le repère lié au solide de référence.

Cette trajectoire peut être :

- un segment de droite,
- un arc de cercle,
- une courbe quelconque.

Notation : **la trajectoire d'un point M appartenant à un solide S dans son mouvement par rapport à un solide 0 est notée $\boldsymbol{T_{M\in S/0}}$.**



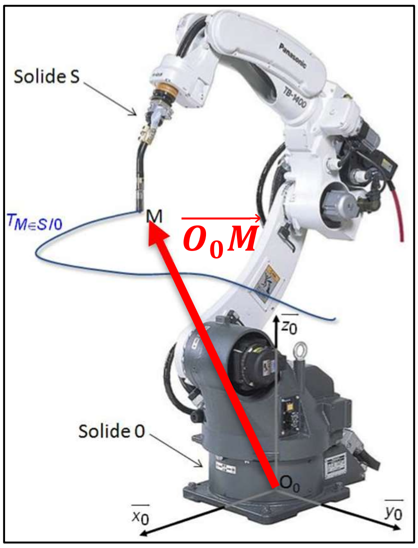
Sur le robot soudeur, la trajectoire $T_{M\in S/0}$ correspond exactement au cordon de soudure réalisé par le robot.

Le point M est un point situé à l'extrémité de la buse de soudage (solide S).

Le repère de référence R_0 $(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au socle du robot (solide 0).

2.2. Le vecteur position

Le vecteur position d'un point M appartenant à un solide S est le vecteur qui lie ce point M à l'origine O_0 du repère de référence $\boldsymbol{R_0}$ $(\boldsymbol{O_0}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z_0}})$.



À l'instant t :

$$\overrightarrow{\mathbf{O_0M}}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}).\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0} + \mathbf{b}(\mathbf{t}).\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{0} + \mathbf{c}(\mathbf{t}).\vec{\mathbf{z}}_\mathbf{0}$$

Selon le mouvement relatif étudié, il peut être judicieux d'exprimer ce vecteur position **à l'aide de coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes** (coordonnées polaires, cylindriques, sphériques : voir annexe 1).

NB : la base $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est la base dans laquelle est exprimé le vecteur $\overrightarrow{O_0M}(t)$, c'est la base de projection de ce vecteur.

2.3. Le vecteur vitesse

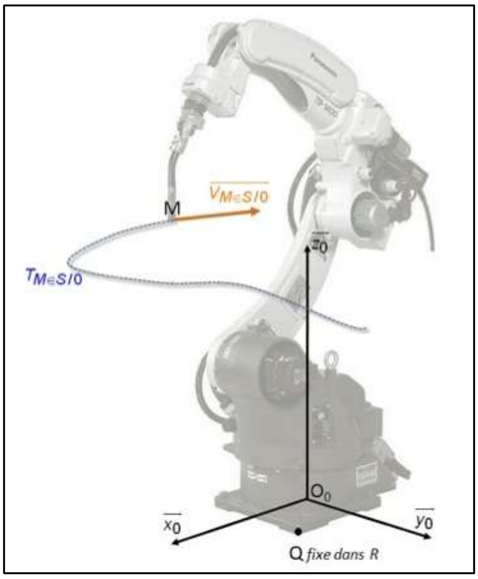
Le vecteur vitesse est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur position dans un repère de référence.

Ce vecteur est **tangent** à $\boldsymbol{T_{M\in S/0}}$.

Sa norme est exprimée en m.s^{-1}.

Le vecteur vitesse du point M appartenant au solide S dans son mouvement par rapport à R_0 $(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V_{M\in S/0}}}(\mathbf{t}) = \left.\frac{\mathbf{d}(\overrightarrow{\mathbf{O_0M}})}{\mathbf{dt}}\right]_{\mathbf{R_0}}}$$



Remarques importantes :

- **S** est le **solide observé** et **0** est le **solide de référence**.
- **M doit avoir une réalité physique sur le solide S** : c'est à dire un point « sur », « dans » le solide ou plus généralement un point dont la distance est constante avec tout point de S à chaque instant (exemple : un point I de l'axe d'une liaison pivot entre 1 et 2 est considéré comme appartenant à 1 ET à 2).

On peut alors reconnaître le vecteur vitesse d'un point par rapport à un référentiel vu en sciences physiques : $\overrightarrow{V(M/R_0, t)} = \overrightarrow{V_{M\in S/0}}(t)$

cinématique du point du point de vue du physicien

cinématique du point d'un solide du point de vue du mécanicien

- **R$_0$** est le **repère de dérivation**, c'est **TOUJOURS le repère de référence du mouvement étudié**.

Attention de ne pas confondre base de projection (base dans laquelle on exprime ses coordonnées) et repère de dérivation d'un vecteur.

Mais aussi, **si Q est un point fixe dans R$_0$** : $\overrightarrow{\mathbf{V_{M\in S/0}}}(\mathbf{t}) = \left.\frac{\mathbf{d}(\overrightarrow{\mathbf{QM}})}{\mathbf{dt}}\right]_{\mathbf{R_0}}$

Remarque : $\overrightarrow{\mathrm{V_{M\in S/0}}}(\mathrm{t}) = -\overrightarrow{\mathrm{V_{M\in 0/S}}}(\mathrm{t})$

Le calcul du vecteur vitesse d'un point d'un solide par cette méthode peut être appelé « **calcul direct** ».

2.4. Le vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse dans un repère de référence.

Sa norme est exprimée en m.s^{-2}.

Le vecteur accélération du point M appartenant au solide S dans son mouvement par rapport à R_0 $(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est alors :

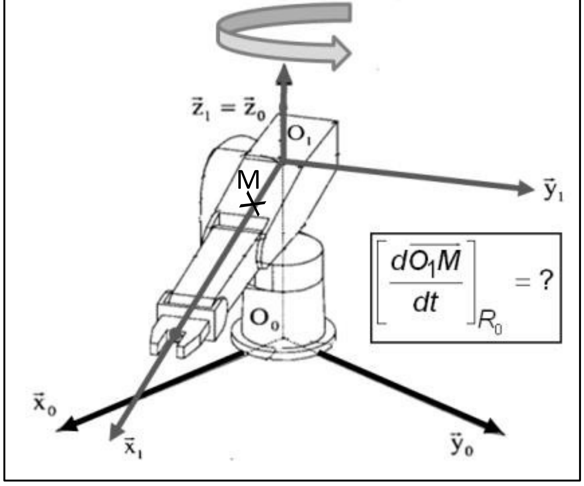
$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{\Gamma_{M\in S/0}}}(\mathbf{t}) = \left.\frac{\mathbf{d}(\overrightarrow{\mathbf{V_{M\in S/0}}})}{\mathbf{dt}}\right]_{\mathbf{R_0}}}$$

Afin d'alléger les notations, nous noterons par la suite : $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{\mathbf{M,S/0}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{M,S/0}}$.

3. Dérivation vectorielle

Les vecteurs vitesse et accélération d'un point sont issus de la **<u>dérivée</u> temporelle <u>du vecteur</u> position** de ce point. Or le calcul de la dérivée temporelle d'un vecteur variable dans le temps n'est pas aussi simple que celle d'une quantité scalaire.

Il s'agit en général d'un vecteur dont on connaît les coordonnées dans une base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ en mouvement par rapport à la base $(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$ du repère de référence R_j.



<u>Exemple d'un bras manipulateur</u> :

On souhaite connaître la vitesse du point M du solide 1 (bras) dans son mouvement par rapport à R_0, $\overrightarrow{O_1M} = L.\vec{x}_1$, mais le vecteur $\vec{x}_1$ est mobile dans R_0 (sa position dépend du temps) donc comment le dériver ?

La première solution consiste à utiliser la figure géométrale B_0 -> B_1, à exprimer $\overrightarrow{O_1M}$ dans B_0 (base liée au repère de référence) puis à dériver ses coordonnées :

Pour éviter des calculs longs et fastidieux, on préfèrera utiliser la <u>relation de dérivation vectorielle</u>

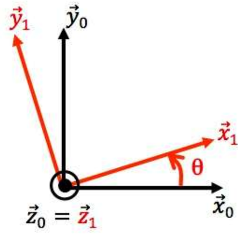
3.1. Vecteur rotation

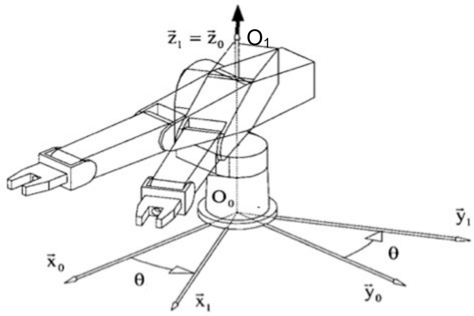
Le vecteur rotation, noté $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{i/j}$ caractérise :

- par sa **direction**, la direction de l'axe autour duquel la base du repère R_i tourne par rapport à la base du repère R_j,
- par sa **norme**, exprimée en **rad.s^{-1}**, la vitesse de ce mouvement de rotation relatif,
- par son **signe**, le sens de ce mouvement de rotation relatif.

Exemple du bras manipulateur :

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$ s'exprime directement à partir de la figure géométrale décrivant le mouvement de 1/0 :





$$\boxed{\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{1/0}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}.\vec{\mathbf{z}}_{\mathbf{0}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}.\vec{\mathbf{z}}_{\mathbf{1}}}$$

dérivée par rapport au temps du paramètre de la rotation de 1/0

Remarque : $\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{0/1}} = -\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{1/0}} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}.\vec{\mathbf{z}}_{\mathbf{0}}$

3.2. Relation de la dérivation vectorielle

On peut déterminer la dérivée, par rapport au temps, d'un vecteur $\vec{\boldsymbol{U}}$ dans un repère de référence $R_j(O_j, \vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$ et dont on connaît les coordonnées dans une base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ par la relation de dérivation vectorielle :

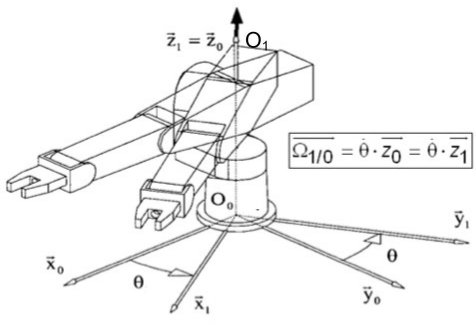
$$\boxed{\left.\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{U}}}{\mathbf{dt}}\right]_{\mathbf{R_j}} = \left.\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{U}}}{\mathbf{dt}}\right]_{\mathbf{R_i}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{i/j}} \wedge \vec{\mathbf{U}}}$$

Cas particulier d'un vecteur unitaire :

$\vec{x}_i$ étant un vecteur unitaire de la base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ on a : $\left.\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right]_{R_j} = \left.\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right]_{R_i} + \vec{\Omega}_{i/j} \wedge \vec{x}_i = \vec{\Omega}_{i/j} \wedge \vec{x}_i$ **car $\vec{x}_i$ est fixe dans le repère R_i.**

L'annexe 2 page 16 synthétise les règles à connaître pour maîtriser le produit vectoriel

Exemple du bras manipulateur :



4. Cinématique du solide

Les relations de la cinématique du solide permettent de déterminer simplement les vecteurs vitesse de l'ensemble des points d'un solide en mouvement par rapport à un repère de référence.

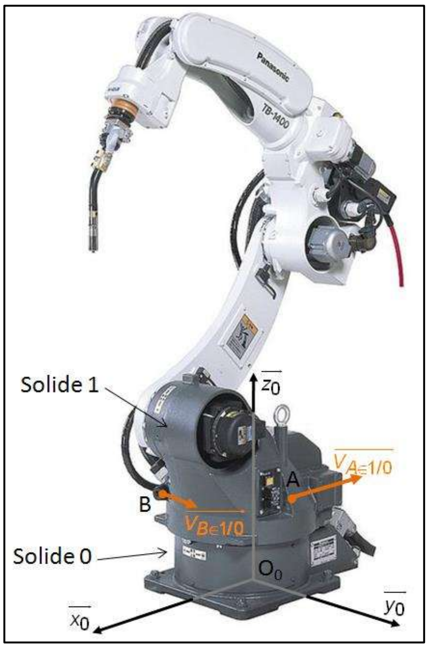
4.1. Rappel : Solide indéformable

Lors de l'utilisation d'un système, les solides qui le constituent se déforment sous l'action des efforts qu'ils subissent.

Dans la suite, on fera l'hypothèse que ces déformations sont suffisamment petites pour que l'on puisse les négliger et on considèrera **les solides comme étant indéformables**.

Cela implique que la distance entre deux points A et B d'un même solide 1 ne varie pas au cours du temps :

$$\boxed{\forall t, \forall (A,B) \in 1, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = cte}$$



4.2. Champ des vecteurs vitesse

Soit un solide 1 (auquel est associé un repère R_1) en mouvement par rapport à un solide 0 (auquel est associé un repère R_0).

L'ensemble des vecteurs vitesse des points du solide 1 est appelé champ des vecteurs vitesse du solide 1.

Soient A et B deux points appartenant au solide 1.
D'après la relation de dérivation vectorielle, on a :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est fixe dans R_1 et sa norme est constante (hyp solides indéformables) donc $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1 = \vec{0}$

De plus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_0} + \overrightarrow{O_0B} = \overrightarrow{O_0B} - \overrightarrow{O_0A}$

Donc :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt}\right]_0 - \left.\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right]_0$$

Or $\left.\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{V_{B,1/0}}$ et $\left.\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{V_{A,1/0}}$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{V_{B,1/0}} - \overrightarrow{V_{A,1/0}} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On retiendra cette relation, qui n'est valable que pour **des points appartenant à un même solide**, sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V_{B,1/0}}} = \overrightarrow{\mathbf{V_{A,1/0}}} + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{1/0}}}$$

<u>Remarque</u> : Cette relation, appelée **relation du champ des vecteurs vitesse** d'un solide, est aussi appelée **relation de Varignon**.

4.3. Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

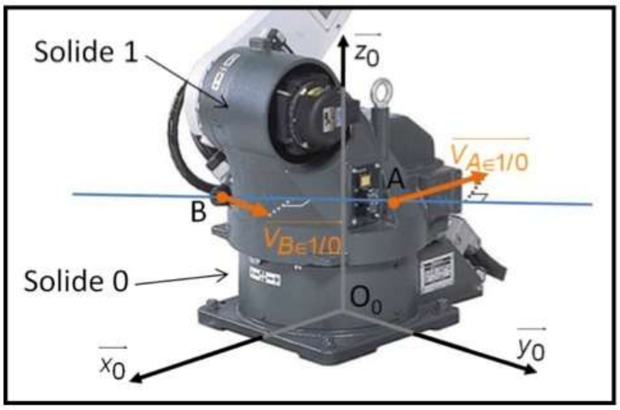
Soient deux points A et B appartenant à un solide 1 en mouvement par rapport à un solide 0.

Grâce à la relation du champ des vecteurs vitesse, on peut écrire : $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

En faisant le produit scalaire par $\overrightarrow{BA}$ de chacun des membres de cette égalité, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B,1/0}}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{V_{A,1/0}}.\overrightarrow{BA}}$$

Cette relation qui traduit l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse est utile lors de l'utilisation des **méthodes graphiques** pour étudier le comportement cinématique des mécanismes.



4.4. Torseur cinématique

Grâce à la relation du champ des vecteurs vitesse, on peut, connaissant la vitesse d'un point d'un solide et son vecteur rotation, déterminer la vitesse de tous les autres points du solide.

Le couple formé par le **vecteur rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$ et le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A,1/0}}$** constitue le **torseur cinématique** du solide 1 dans son mouvement par rapport au solide 0 exprimé au point A :

$$\boxed{\{\mathbf{V}_{1/0}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{\Omega}}_{1/0} \\ \vec{\mathbf{V}}_{A,1/0} \end{Bmatrix}_{\mathbf{B_0}}}$$

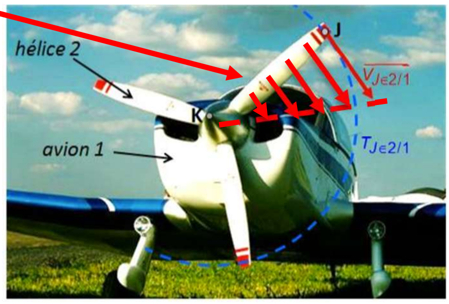
$\vec{\mathbf{\Omega}}_{1/0}$ est la **<u>résultante</u> cinématique** du torseur, elle est **indépendante du point choisi** pour exprimer le torseur,

$\vec{\mathbf{V}}_{A,1/0}$ est le **<u>moment</u> cinématique** du torseur au point A.

<u>NB</u> : Quel que soit le point choisi, le solide 1 tourne toujours autour du même axe, dans le même sens et à la même vitesse angulaire par rapport au solide 0. Raison pour laquelle la résultante cinématique ne dépend pas du point choisi pour exprimer le torseur. En revanche, la relation du **<u>champ des vecteurs vitesse</u>** nous montre que le vecteur vitesse varie suivant le point où il est exprimé.

<u>Exemple</u> : hélice d'avion de tourisme :

Quel que soit le point considéré, l'hélice tourne à la même vitesse $\|\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\|$.
En revanche, chaque point de l'hélice à une vitesse différente que l'on peut déterminer si l'on connaît la vitesse en un point (par exemple en K, centre de l'hélice).



<u>Moyen mnémotechnique sur la relation du champ des vecteurs vitesse d'un solide</u> :

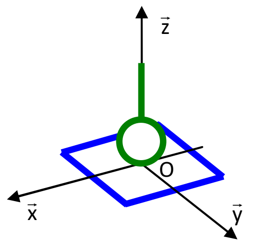
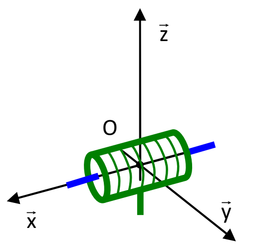
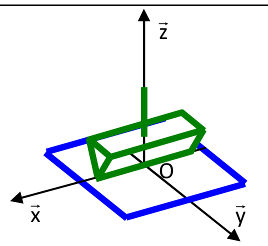
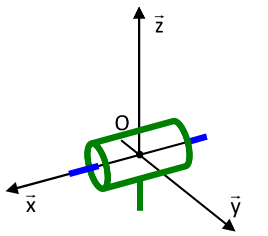
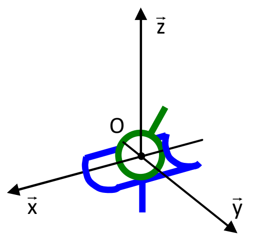
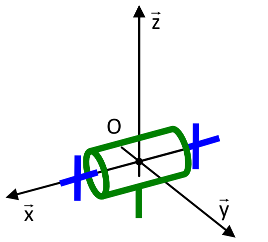
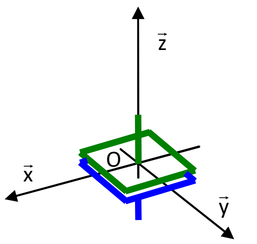
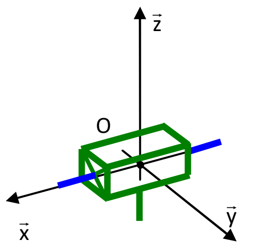
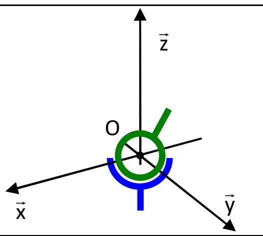
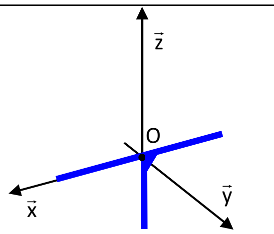
On a vu précédemment : $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

B A BA R R comme résultante cinématique

4.5. Torseur cinématique des liaisons usuelles

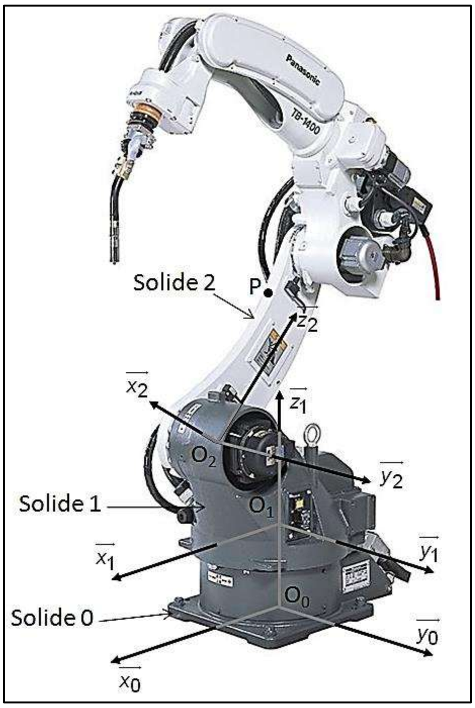
Chaque liaison normalisée possède un torseur cinématique.

Tous les torseurs cinématiques des liaisons normalisées sont à connaître par cœur ! La page entière est donc à connaître par cœur :

Liaison ponctuelle en O de normale $(O,\vec{z})$		**Liaison hélicoïdale d'axe $(O,\vec{x})$**	
	${}_O\left\{\begin{matrix}\Omega_x & v_x\\ \Omega_y & v_y\\ \Omega_z & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_O\left\{\begin{matrix}\Omega_x & v_x\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ + 1 <u>relation de dépendance</u> : $v_x = \pm\frac{pas}{2\pi}\Omega_x$
Liaison Linéaire Rectiligne d'axe $(O,\vec{x})$ et de normale $\vec{z}$		**Liaison pivot glissant d'axe $(O,\vec{x})$**	
	${}_O\left\{\begin{matrix}\Omega_x & v_x\\ 0 & v_y\\ \Omega_z & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_O\left\{\begin{matrix}\Omega_x & v_x\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Liaison linéaire annulaire d'axe $(O,\vec{x})$		**Liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$**	
	${}_O\left\{\begin{matrix}\Omega_x & v_x\\ \Omega_y & 0\\ \Omega_z & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_O\left\{\begin{matrix}\Omega_x & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Liaison appui plan de normale $\vec{z}$		**Liaison glissière de direction $\vec{x}$**	
	${}_O\left\{\begin{matrix}0 & v_x\\ 0 & v_y\\ \Omega_z & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_O\left\{\begin{matrix}0 & v_x\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Liaison rotule de centre O		**Liaison encastrement**	
	${}_O\left\{\begin{matrix}\Omega_x & 0\\ \Omega_y & 0\\ \Omega_z & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_O\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

4.6. Composition des vecteurs vitesse

Soit un point P appartenant à un solide 2 en mouvement par rapport à un solide 1, lui même en mouvement par rapport à un solide 0.



On a :

$$\vec{V}_{P,2/0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0P}}{dt}\right]_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right]_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_0 \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

Donc :

$$\vec{V}_{P,2/0} = \vec{V}_{O_1,1/0} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P} \qquad \text{(dérivation vectorielle)}$$

$$\vec{V}_{P,2/0} = \vec{V}_{O_1,1/0} + \vec{V}_{P,2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

$$\vec{V}_{P,2/0} = \vec{V}_{P,2/1} + \vec{V}_{O_1,1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

$$\vec{V}_{P,2/0} = \vec{V}_{P,2/1} + \vec{V}_{O_1,1/0} + \overrightarrow{PO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

Ce qui donne, grâce à la relation du champ des vecteurs vitesse :

$$\boxed{\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,2/0}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,2/1}} + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,1/0}}}$$

$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,2/1}}$ est la vitesse du point P appartenant au solide 2 dans son mouvement par rapport au solide 1 : **c'est la vitesse relative**.

$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,1/0}}$ est la vitesse du point P, comme s'il était fixe dans le repère R_1, dans son mouvement par rapport au solide 0 : **c'est la vitesse d'entraînement**.

Le point P n'appartient pas réellement au solide 1, il n'a pas de réalité physique sur le solide 1, on parle alors de point coïncident.
Dériver le vecteur position pour calculer la vitesse d'un point coïncident est donc **INTERDIT** !
Pour calculer la vitesse $\vec{V}_{P,1/0}$ en un point coïncident on utilisera donc **OBLIGATOIREMENT** la relation du champ des vecteurs vitesse (relation de Varignon) en passant par un point qui appartient matériellement au solide considéré (ici 1) *voir exemple paragraphe 6.1.*

On peut généraliser cette relation à n solides en mouvement les uns par rapport aux autres :

$$\boxed{\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,n/0}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,n/n-1}} + \cdots + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P,1/0}}}$$

Cette relation permet de déterminer simplement la vitesse d'un point appartenant à un solide dont le mouvement est complexe.

Ce mouvement complexe sera alors décomposé en une somme de mouvements simples ou mouvements élémentaires :

- **rotation autour d'un axe fixe,**
- **translation rectiligne ou curviligne**

→ *voir paragraphe 5*

4.7. Composition des vecteurs rotation

La relation de composition des vecteurs rotation, généralisée à n solides en mouvement les uns par rapport aux autres est :

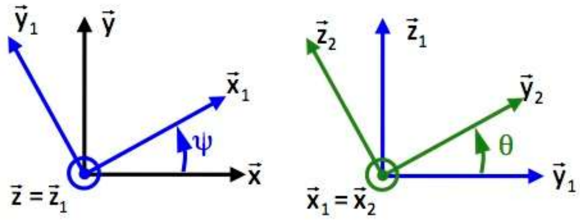
$$\boxed{\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{n/0}} = \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{n/n-1}} + \cdots + \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{1/0}}}$$

<u>Exemple</u> : Soient les 2 mouvements de rotation paramétrés par les figures géométrales ci-dessous :

$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi}.\vec{z}_1$ et $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}.\vec{x}_1$

Par composition des vecteurs rotation :

$\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_1$



4.8. Composition des torseurs cinématiques

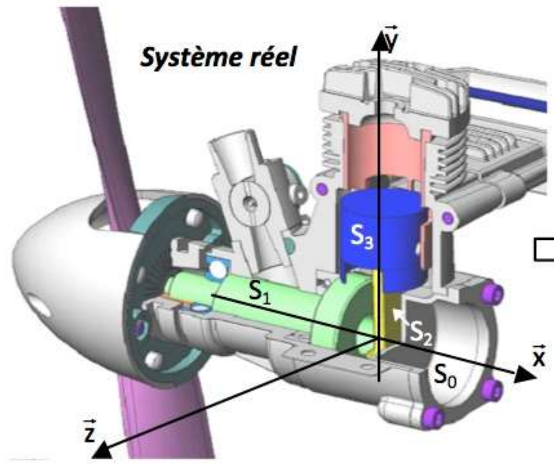
Les deux relations établies précédemment nous permettent d'écrire dans le cas de n solides en mouvement les uns par rapport aux autres :

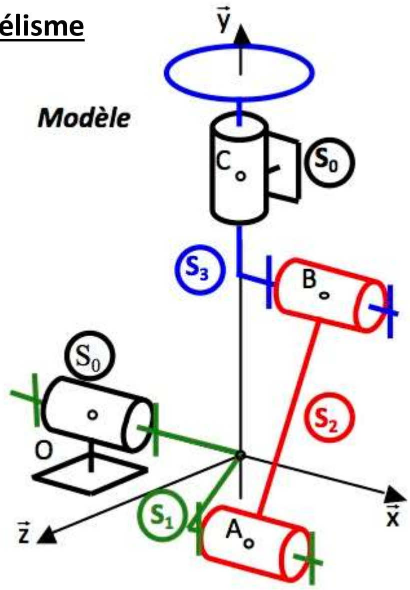
$$\boxed{\left\{\mathbf{V}_{\mathbf{n/0}}\right\}_{\mathbf{A}} = \left\{\mathbf{V}_{\mathbf{n/n-1}}\right\}_{\mathbf{A}} + \cdots + \left\{\mathbf{V}_{\mathbf{1/0}}\right\}_{\mathbf{A}}}$$

<u>Les torseurs doivent impérativement être exprimés au même point pour pouvoir être additionnés.</u>

5. Mouvements élémentaires

<u>Moteur d'aéromodélisme</u>





5.1. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

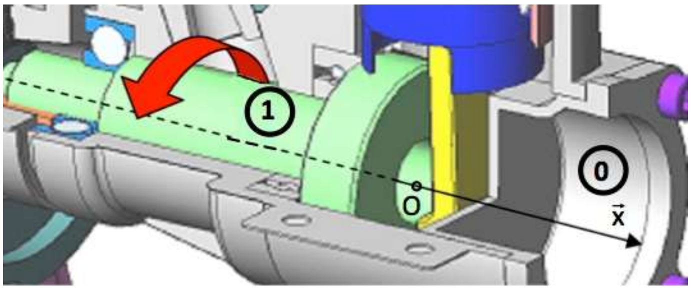
Dans le cas d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe d'un solide S par rapport à un repère R, il existe au moins deux points du solide S qui restent fixes dans le mouvement par rapport à R. Ces deux points caractérisent l'axe de rotation Δ de S/R. L'axe Δ est **l'axe instantané de rotation** de S/R. La position de S/R est définie par un paramètre cinématique angulaire (exemple θ) variable au cours du temps.

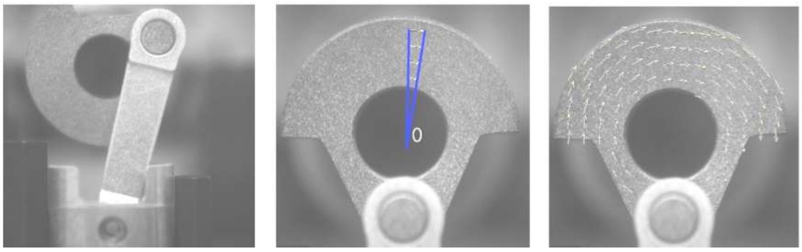
Exemple du micromoteur de modélisme :

Le vilebrequin 1 est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport au bâti 0.

L'axe instantané de rotation du vilebrequin 1 par rapport au bâti 0 est l'axe $(O, \vec{x})$. Par conséquent tous les points de l'axe $(O, \vec{x})$ restent fixes au cours du mouvement 1/0 :

$\forall \mathbf{P} \in (\mathbf{O}, \vec{\mathbf{x}}) : \ \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{P},1/0} = \vec{\mathbf{0}}$





Visualisation expérimentale du champ de vecteur vitesse du vilebrequin (amplifié 10x sur la figure) par analyse d'images obtenues d'une caméra rapide (600000 images par secondes) grâce à une technique de corrélation d'images.

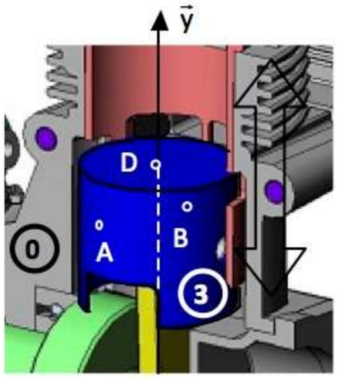
- Une liaison pivot permet d'obtenir ce mouvement.
- Le champ des vitesses s'écrit ici pour tout point A du vilebrequin : $\vec{V}_{A,1/0} = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$
- Les trajectoires de tous les points du vilebrequin sont des cercles centrés sur l'axe Δ.

5.2. Mouvement de translation

Dans le cas d'un mouvement de translation d'un solide S par rapport à un repère R, le solide ne change pas d'orientation par rapport à R. La position de S/R est définie par un paramètre cinématique linéaire (exemple λ) variable au cours du temps.

Exemple du micromoteur de modélisme :

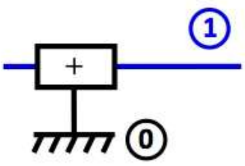
Le piston 3 du moteur est en mouvement de translation suivant $\vec{y}$



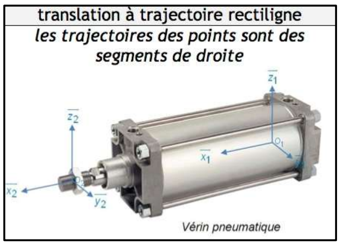
- Une liaison glissière ou pivot glissant permet d'obtenir ce mouvement.
- Tous les vecteurs vitesse des points du piston sont égaux au cours du mouvement et le champ des vitesses s'écrit ici : $\forall (A, B) \in 3 \ : \ \vec{V}_{A,3/0} = \vec{V}_{B,3/0}$

Dans le cas d'un mouvement de translation de S/R, les trajectoires de tous les points de S sont superposables :

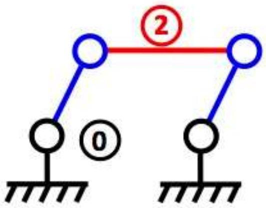
- si ces trajectoires sont des droites, on parle de mouvement de **TRANSLATION à trajectoire RECTILIGNE** :



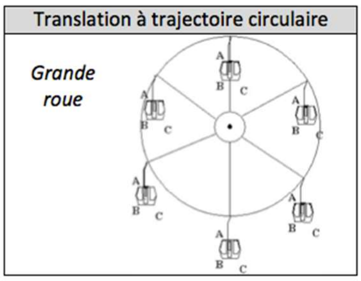
1/0 : Translation RECTILIGNE



- si ces trajectoires sont des cercles, on parle de mouvement de **TRANSLATION à trajectoire CIRCULAIRE (ou curviligne)** :



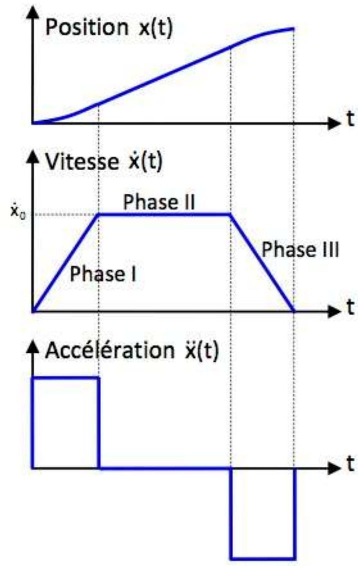
2/0 : Translation CIRCULAIRE



5.3. Mouvement uniforme / uniformément varié

Dans de très nombreux cas, un solide peut suivre un **mouvement (de translation ou de rotation) uniforme** ou un **mouvement (de translation ou de rotation) uniformément varié**.

Exemple d'une loi de mouvement de translation en trapèze de vitesse :



***Phase II** : mouvement uniforme : la vitesse est la même au cours du mouvement. Graphiquement, on observe une fonction constante (segment de droite horizontal).*

***Phase I** et **Phase III** : mouvement uniformément varié : l'accélération est la même au cours du mouvement (positive pour la phase I et négative pour la phase III). Graphiquement, on observe une portion de droite (segment de droite incliné)*

6. Démarche de détermination des vecteurs vitesse et accélération

6.1. Détermination du vecteur vitesse

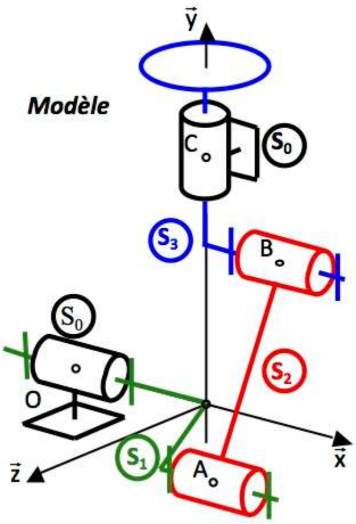
Il existe deux méthodes permettant de déterminer le vecteur vitesse d'un point appartenant à un solide en mouvement par rapport à un solide de référence :

Calcul direct : **dérivée du vecteur position**	**Composition des vecteurs vitesse** et champ des vecteurs vitesse

Dans tous les cas, on s'attachera à vérifier que le résultat est bien homogène à une vitesse linéaire ($m.s^{-1}$).

NB : il n'est pas nécessaire d'exprimer le résultat dans une seule base.

Exemple du micromoteur de modélisme :



On associe au bâti S_0 le repère $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ fixe.
On associe au vilebrequin S_1 le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$.
On note $\alpha=(\vec{y},\vec{y}_1)=(\vec{z},\vec{z}_1)$ le paramètre de rotation de S_1/S_0.
On associe à la bielle S_2 le repère $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.
On note $\beta=(\vec{y},\vec{y}_2)=(\vec{z},\vec{z}_2)$ le paramètre de rotation de S_2/S_0.

$\overrightarrow{OA}=L.\vec{x}+R_1.\vec{z}_1$ et $\overrightarrow{AB}=R_2.\vec{y}_2$

Déterminer l'expression de $\vec{V}_{B,2/0}$:

- Par le calcul direct : $\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_0$
- Par composition des vecteurs vitesse : en décomposant le mouvement 2/0 « = 2/1 + 1/0 »

6.2. Détermination du vecteur accélération

La relation du champ des vecteurs vitesse et la relation des compositions des accélérations, qui ne sont pas présentées dans ce cours, ne sont pas simples à retenir et à utiliser.

Pour le calcul des vecteurs accélération, on privilégiera la méthode qui consiste à calculer la dérivée du vecteur vitesse, par rapport au temps et dans le repère de référence.

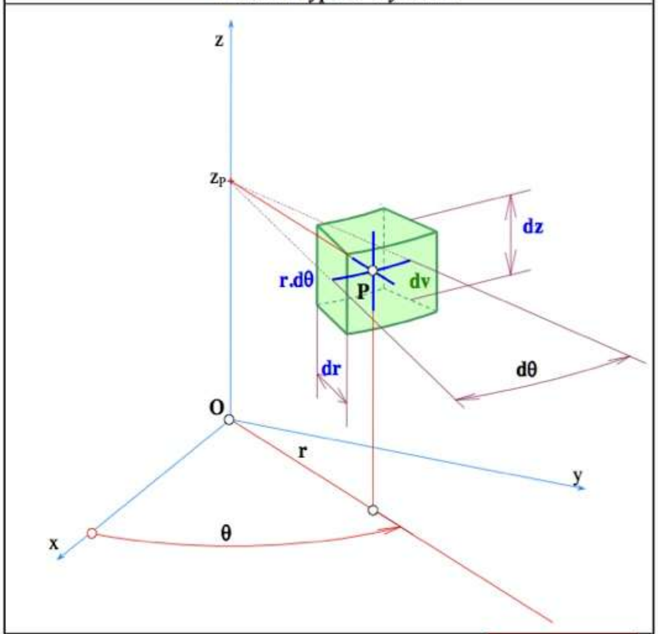
<u>On s'attachera à vérifier que le résultat est bien homogène à une accélération ($m.s^{-2}$).</u>

<u>Exemple du micromoteur de modélisme</u> :

Déterminer l'expression de $\vec{\Gamma}_{B,2/0}$:

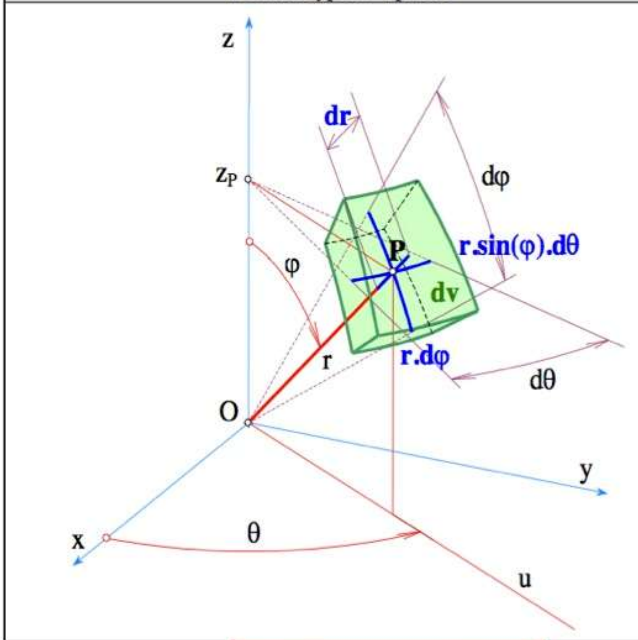
ANNEXE 1 : Systèmes de coordonnées

Coordonnées cylindriques
Volume type : "cylindre"



Volume élémentaire: $\boxed{dv = r \bullet dr \bullet d\theta \bullet dz}$ *avec* $\overrightarrow{OP}\left| \begin{array}{l} r \bullet \cos(\theta) \\ r \bullet \sin(\theta) \\ z_P \end{array} \right.$

Coordonnées sphériques
Volume type : "Sphère"



Volume élémentaire: $\boxed{dv = r^2 \bullet \sin(\varphi) \bullet dr \bullet d\theta \bullet d\varphi}$

avec $\overrightarrow{OP}\left| \begin{array}{l} r \bullet \sin(\varphi) \bullet \cos(\theta) \\ r \bullet \sin(\varphi) \bullet \sin(\theta) \\ r \bullet \cos(\varphi) \end{array} \right.$ *et* $\boxed{\overrightarrow{z_G P} = r \bullet \sin(\varphi) \bullet \vec{u}}$

ANNEXE 2 : Produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$

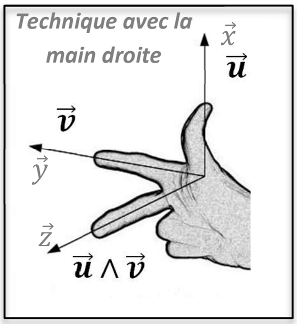
<u>Définition</u> : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u},\vec{v})| \cdot \vec{n}$ telle que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ forme une base directe.

Pour 2 vecteurs unitaires de la même base :

$\vec{x_1} \wedge \vec{y_1} = \vec{z_1}$ $\vec{y_1} \wedge \vec{z_1} = \vec{x_1}$ $\vec{z_1} \wedge \vec{x_1} = \vec{y_1}$

$\vec{y_1} \wedge \vec{x_1} = -\vec{z_1}$ $\vec{z_1} \wedge \vec{y_1} = -\vec{x_1}$ $\vec{x_1} \wedge \vec{z_1} = -\vec{y_1}$

<u>**NB**</u> **:** $\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{z} = \vec{0}$ **et** $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$



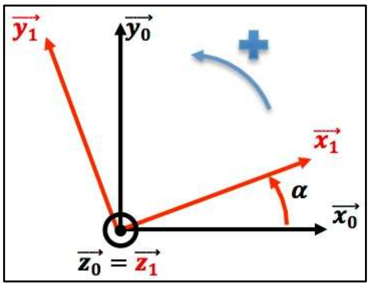
Pour 2 vecteurs unitaires de bases différentes mais visibles sur la même figure géométrale :

3 grandeurs sont à déterminer :

<u>la direction</u> : TOUJOURS le **vecteur commun aux 2 bases**

<u>le signe</u> : **signe de l'angle** $(\vec{u},\vec{v})$ <u>**Attention**</u> **: angle de $\vec{u}$ VERS $\vec{v}$**

<u>cosα ou sinα ?</u> : même lettre : sinα / pas la même lettre : cosα



$$\vec{x_0} \wedge \vec{x_1} = \sin(\alpha) \cdot \vec{z_0}$$

$$\vec{x_0} \wedge \vec{y_1} = \cos(\alpha) \cdot \vec{z_0}$$

$$\vec{y_0} \wedge \vec{x_1} = -\cos(\alpha) \cdot \vec{z_0}$$

Pour 2 vecteurs unitaires de bases différentes et non visibles sur la même figure géométrale :

<u>**Projeter dans une autre base au moins un des 2 vecteurs**</u>

Pour 2 vecteurs quelconques dont on connaît les coordonnées dans la même base :

$$\vec{u} = a.\vec{x_1} + b.\vec{y_1} + c.\vec{z_1} \qquad \vec{v} = d.\vec{x_1} + e.\vec{y_1} + f.\vec{z_1}$$

<u>1ère méthode</u> :

On développe le produit vectoriel et on fait les 9 produits vectoriels de vecteurs unitaires.

<u>2ème méthode</u> :

On écrit chaque vecteur en colonne $\vec{u} = {}_{B1}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ et $\vec{v} = {}_{B1}\begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix}$

et on adopte la règle suivante :

$${}_{B1}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge {}_{B1}\begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} = {}_{B1}\begin{vmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{vmatrix}$$