

Durée de l'épreuve : 3h00

Aucun document autorisé - Calculatrice autorisée

Cet énoncé comporte 12 pages d'énoncé numérotées de 1 à 12.

Les réponses se feront sur feuilles de copie.

La notation tiendra compte de la justesse des résultats ainsi que de la rédaction et du soin apporté à la composition.

SLED

d'après Centrale Supélec 2022

I. Support d'étude

I.A – Contexte

L'obligation réglementaire de présence d'appui-têtes dans les voitures a contribué à une meilleure protection des conducteurs et des passagers en limitant les traumatismes dus au « coup du lapin » (figure 1). Ce phénomène correspond à un mouvement brusque de flexion-extension de la tête par rapport au buste. Il peut être causé en voiture, lors de chocs à basse vitesse par exemple, ou dans des situations d'embouteillage. Aucune lésion n'est visible en imagerie médicale, cependant les victimes de ce traumatisme cervical souffrent de douleurs handicapantes sur le long terme.



Figure 1 Réduction du phénomène du « coup du lapin » par l'usage d'un appui-tête (Référence : R.T. Shone)

Les crash-tests automobiles réalisés actuellement, sont effectués, entre autres, grâce à des mannequins de choc instrumentés représentatifs de différentes catégories de morphologie (par exemple, le mannequin représentant 50% des tests, correspond à un homme mesurant 1,75 m et pesant 80 kg). L'étude de la diversité morphologique n'est cependant pas complète. De plus, la contribution musculaire de l'humain qui réagit au choc ne peut pas être étudiée. Mais surtout, les systèmes expérimentaux de crash-tests déjà disponibles ne sont pas représentatifs du phénomène de « coup du lapin » en termes d'accélération et d'énergie dissipée lors du choc.

L'étude proposée porte sur la conception d'un dispositif expérimental, appelé Sled, ainsi que son modèle numérique, qui serviront, dans le cadre de travaux de recherche, à mieux comprendre les phénomènes liés au « coup du lapin » et ainsi à adapter à terme les moyens de prévention et de protection des individus en fonction des morphologies. La conception s'articule en 3 étapes.

— Première étape : conception d'un Sled 0,3g

Afin de comprendre les traumatismes causés par le phénomène de « coup du lapin », il est nécessaire, de développer un dispositif expérimental particulier, permettant de générer des niveaux d'énergie faibles et non lésionnels à un volontaire. Ces faibles niveaux d'énergie correspondent à des accélérations et décélérations fixées à $\pm 0,3g$ pendant une durée de 1 seconde chacune.

— Deuxième étape : élaboration de modèles

Ces données, recueillies sur des personnes volontaires, serviront à enrichir une base de données et permettront de développer des modèles de comportement à ce niveau d'énergie, mais aussi à des niveaux d'énergie réels (accélération/décélération de $\pm 1g$ pendant 1 seconde).

— Troisième étape : conception d'un Sled 1g

Un second dispositif expérimental sera ensuite construit. Avec des accélérations de $\pm 1g$, les expérimentations ne pourront être conduites qu'avec des mannequins de chocs. Ce second dispositif, plus représentatif en ce qui concerne les niveaux d'accélération, servira alors à affiner les modélisations numériques.

La modélisation biomécanique des individus ainsi que les réactions musculaires des volontaires ne seront pas étudiées ici. Le sujet portera exclusivement sur les deux premières étapes.

Le principe retenu par les ingénieurs du bureau d'études pour concevoir le Sled (figure 2) est inspiré des crash-tests réalisés dans le domaine automobile :

- une plateforme est animée d'un mouvement de translation horizontale par rapport au bâti ;
- un passager (volontaire ou mannequin) peut prendre place sur cette plateforme via un siège ;
- un dispositif de mise en mouvement permet d'atteindre les accélérations et décélérations attendues.

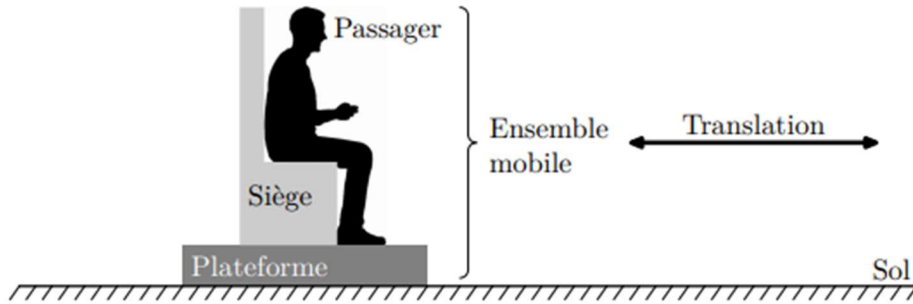


Figure 2 Principe retenu pour la conception du Sled

I.B – Diagramme partiel des exigences du Sled pour les versions 0,3g et 1g

Afin que les accélérations et les vitesses générées soient représentatives du phénomène de « coup du lapin », le Sled doit satisfaire les exigences définies figure A ci-dessous.

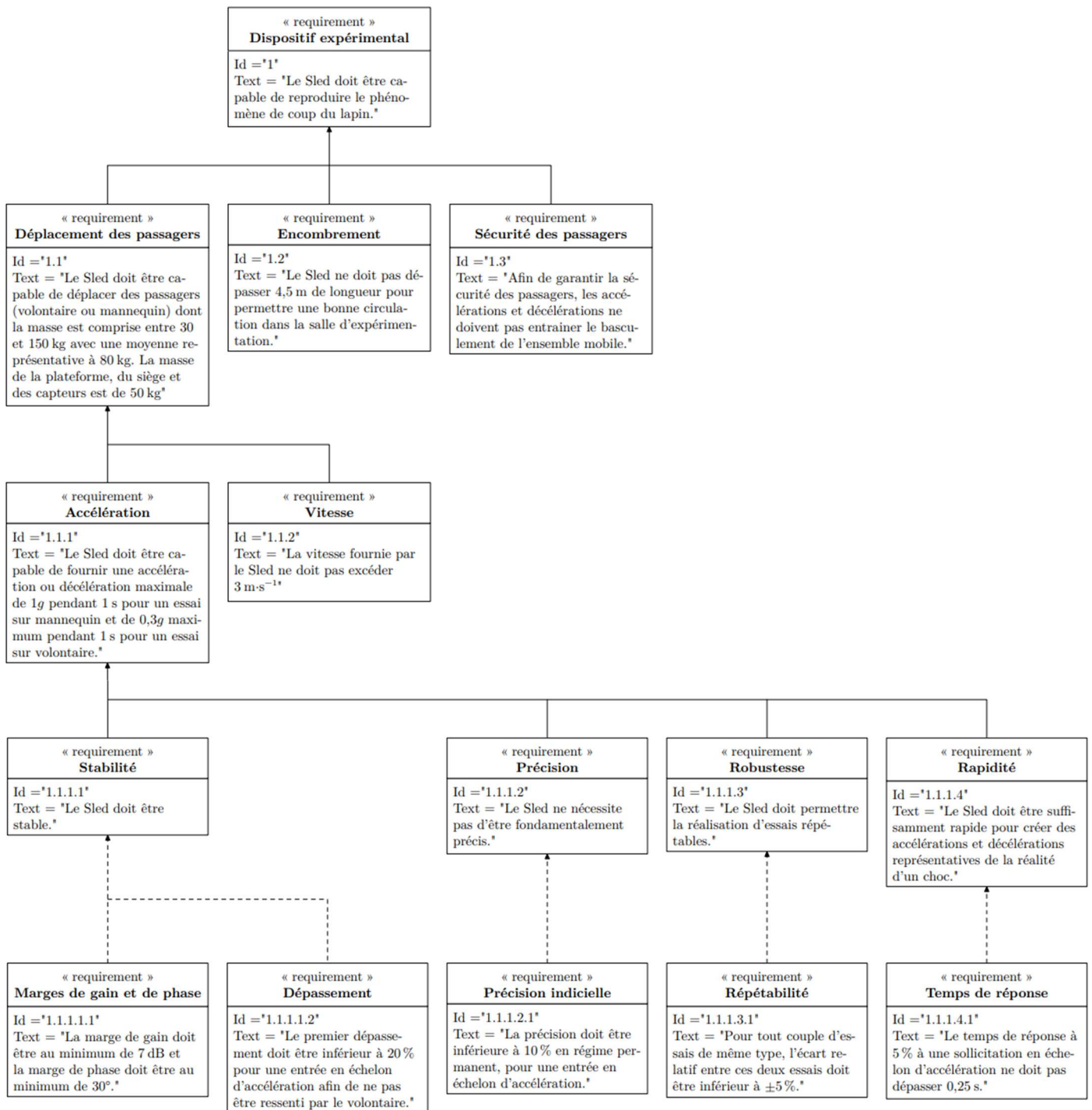


Figure A Diagramme partiel des exigences du Sled

II. Pré-dimensionnement du SLED 0,3g

La première étape du développement du Sled 0,3g qui sera utilisé avec des personnes volontaires consiste à prédimensionner certains éléments technologiques pour atteindre les performances définies dans le diagramme des exigences (figure A).

Ainsi, dans une première approche simplifiée, l'ensemble mobile est modélisé par une masse rigide en liaison glissière par rapport au bâti, comme défini sur la figure 3. Pour effectuer des campagnes de tests représentatifs du phénomène de coup du lapin avec des personnes volontaires, le profil d'accélération défini sur la figure 4 est adopté.

Modèle cinématique

- Soit S_0 le bâti lié au sol.
- Soit S l'ensemble mobile {volontaire + siège + plateforme + capteurs}, en liaison glissière de direction \vec{x}_0 avec le bâti S_0 .

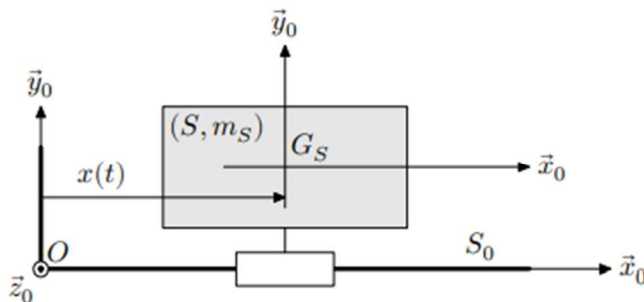


Figure 3 Modélisation cinématique de l'ensemble mobile S en liaison avec le bâti S_0

Notations et données

- Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ associé au solide S_0 est supposé galiléen.
- Le repère $R_S(G_s, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ associé à l'ensemble mobile S .
- t , le temps, exprimé en secondes.
- m_S , la masse de l'ensemble mobile S , G_S son centre de gravité tel que $x(t) = \overline{OG_S} \cdot \vec{x}_0$.
- $\vec{V}_{(G_S, S/S_0)} = v(t)\vec{x}_0$, la vitesse du centre de gravité G_S de l'ensemble mobile S par rapport au bâti S_0 .
- $\vec{a}_{(G_S, S/S_0)} = a(t)\vec{x}_0$, l'accélération du centre de gravité G_S de l'ensemble mobile S par rapport au bâti S_0 .
- L'accélération de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Profil d'accélération type

- L'ensemble mobile S est considéré au repos à l'état initial : ses position, vitesse et accélération sont considérées nulles à l'instant initial.
- L'ensemble mobile S est ensuite soumis à un cycle complet d'une accélération constante $a_c = +0,3g$ pendant 1 seconde, puis d'une décélération constante de $-0,3g$ pendant 1 seconde. Son évolution temporelle, $a(t)$, est présentée sur la figure 4.

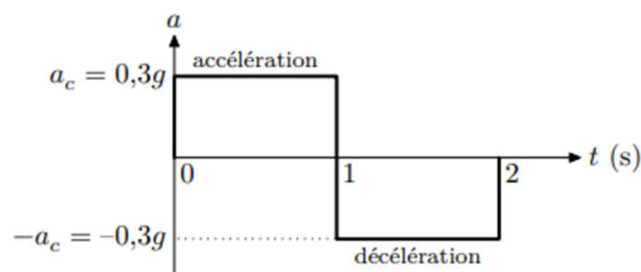


Figure 4 Évolution de l'accélération au cours du temps

II.A – Encombrement spatial du Sled 0,3g

— Objectif —

L'objectif est de vérifier que la course du Sled est compatible avec une utilisation dans une salle d'expérimentation.

Q 1. Déterminer l'expression littérale de la vitesse $v(t)$ en fonction de l'accélération a_c , dans la première phase d'accélération.

Q 2. En déduire la valeur maximale, notée V_{\max} et exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, de la vitesse atteinte par l'ensemble mobile S au bout d'une seconde avec une accélération constante de $0,3g$. Conclure sur le respect de l'exigence Id = 1.1.2.

Un essai complet comprend une phase d'accélération suivie d'une phase de décélération.

Q 3. Déterminer la distance maximale théorique, notée x_{\max} et exprimée en m, parcourue par l'ensemble mobile S au cours d'un essai complet. Vérifier le respect de l'exigence Id = 1.2.

III. Mise en place d'un modèle numérique pour le SLED 0,3g

Le bureau d'études décide de poursuivre le dimensionnement en modélisant l'asservissement du Sled. Il sera ainsi possible de définir la structure de commande de l'actionneur qui permettra de respecter les exigences définies dans le diagramme présenté en figure A.

III.A – Commande en vitesse sans correction

— Objectif —

L'objectif consiste dans un premier temps à valider, à partir d'un modèle, le principe d'une structure d'asservissement en vitesse, sur une commande en accélération.

Un premier modèle multiphysique (modèle n°1, figure 20) a été réalisé par les ingénieurs du bureau d'études à partir des éléments fournis par le prédimensionnement réalisé précédemment.

Hypothèses d'étude

— Le modèle proposé comporte trois parties :

- une partie électrique avec un moteur contrôlé en courant qui convertit l'énergie électrique en énergie mécanique en rotation ;
- une partie mécanique en rotation constituée d'un axe moteur et de ses frottements internes ;
- une partie mécanique en translation issue d'un dispositif de transformation de mouvement de rotation en mouvement de translation. Le dispositif associé de type pignon-crémaillère est considéré parfaitement rigide. Cette partie mécanique en translation comporte les différentes masses embarquées : plateforme + siège + capteurs et volontaire.

— La particularité de ce modèle réside dans le fait qu'il s'agit d'une structure d'asservissement en vitesse, sur une commande en accélération. En effet, afin de répondre à la problématique exposée en introduction, la consigne appliquée au modèle est une accélération de $+0,3g$ appliquée pendant une durée de 1 seconde, suivi d'une accélération de $-0,3g$ (ou décélération) appliquée pendant une durée de 1 seconde également (figure 4).

— Les performances attendues (stabilité, précision, rapidité...) et définies dans le diagramme des exigences (figure A) sont donc des performances en accélération (sauf indication contraire). Cette consigne en accélération est adaptée pour permettre la commande en vitesse du moteur. Un asservissement en vitesse est réalisé à l'aide d'un capteur de vitesse de gain unitaire.

Q 13. Quels sont les rôles respectifs des blocs A et B du modèle n°1 (figure 20) ?

La modélisation multiphysique proposée peut ainsi être modélisée sous la forme d'un schéma bloc (figure 7).

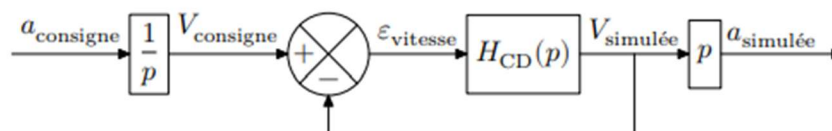


Figure 7 Modélisation n°1 du Sled sous forme de schéma bloc à retour unitaire

Notations et données

— L'ensemble des trois parties du modèle décrites précédemment (électrique, mécanique en rotation et mécanique en translation) constitue la chaîne directe du système que l'on modélise par la fonction de transfert $H_{CD}(p)$.

— La fonction de transfert de l'asservissement en accélération est modélisée sous la forme

$$H_{acc}(p) = \frac{\text{Accélération simulée}(p)}{\text{Consigne accélération}(p)} = \frac{a_{simulée}(p)}{a_{consigne}(p)}.$$

— La fonction de transfert de l'asservissement en vitesse en boucle ouverte peut s'écrire sous la forme d'un second ordre

$$H_{BO}(p) = H_{CD}(p) = \frac{\text{Vitesse simulée}(p)}{\text{Écart vitesse}(p)} = \frac{V_{simulée}(p)}{\varepsilon_{vitesse}(p)} = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2\xi_{BO}}{\omega_{0BO}}p + \frac{1}{\omega_{0BO}^2}p^2}.$$

— La fonction de transfert de l'asservissement en vitesse en boucle fermée est modélisée sous la forme

$$H_{BF}(p) = \frac{\text{Vitesse simulée}(p)}{\text{Consigne vitesse}(p)} = \frac{V_{simulée}(p)}{V_{consigne}(p)}.$$

Pour effectuer la commande en accélération du modèle n°1 (figure 20), les ingénieurs du bureau d'études proposent de travailler sur la commande en vitesse.

Q 14. Justifier cette proposition en déterminant la fonction de transfert en accélération $H_{acc}(p)$ en fonction de $H_{BF}(p)$. Conclure sur l'intérêt de cette proposition.

Une première simulation avec ce modèle n°1 (figure 20) permet d'obtenir le diagramme de Bode de l'asservissement en vitesse en boucle ouverte $H_{BO}(p)$, proposé en figure 8.

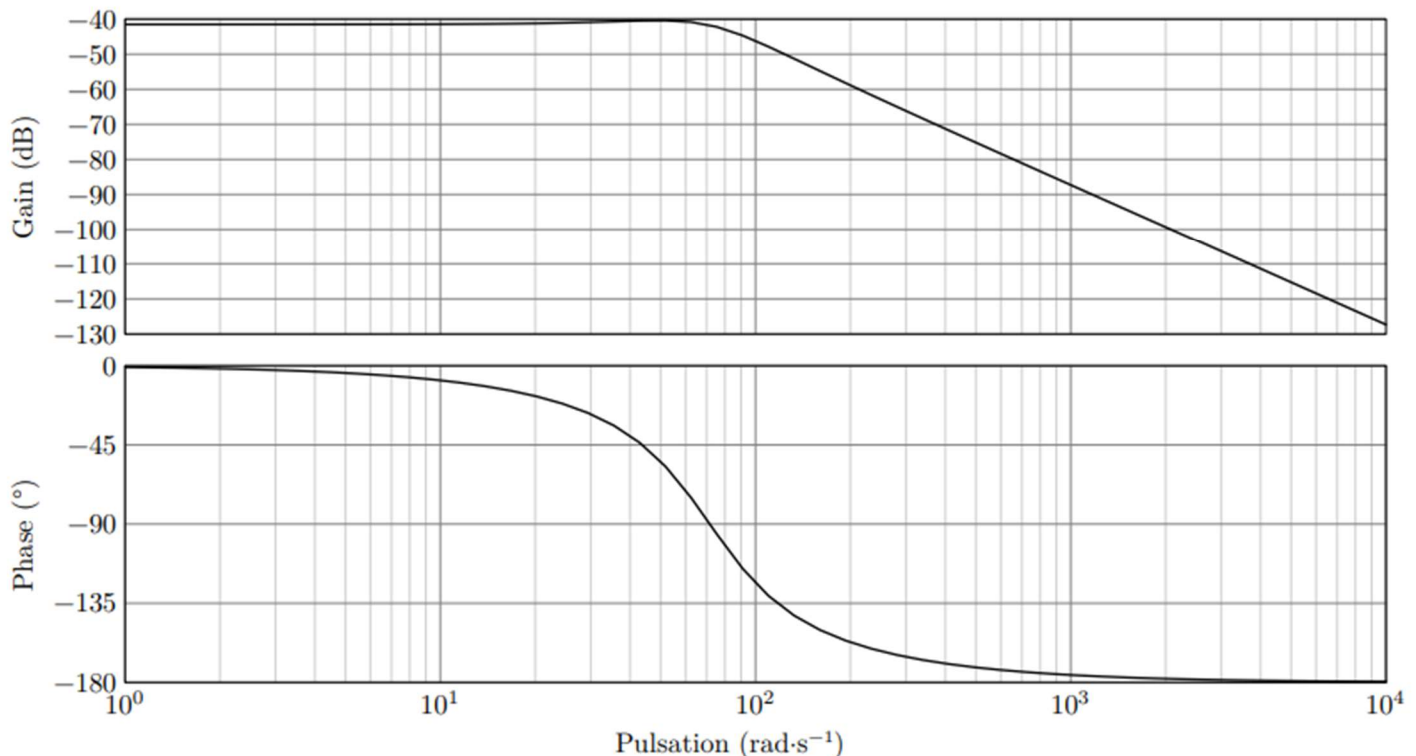


Figure 8 Diagramme de Bode en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse du modèle n°1 (figure 20)

Q 15. Évaluer graphiquement les marges de stabilité du système et conclure sur le respect de l'exigence Id = 1.1.1.1.1.

Une résonance de +1,1 dB par rapport à l'asymptote horizontale située à -41,5 dB est observée à la pulsation de 49,4 rad·s⁻¹.

Q 16. Calculer les valeurs numériques des paramètres K_{BO} , ω_{0BO} et ξ_{BO} de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ de l'asservissement en vitesse.

Q 17. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ en fonction de K_{BO} , ω_{0BO} et ξ_{BO} . Identifier ses coefficients K_{BF} , ω_{0BF} et ξ_{BF} en fonction de K_{BO} , ω_{0BO} et ξ_{BO} .

La suite du questionnement sera effectuée avec les valeurs numériques suivantes :

$$K_{BO} = 8,4 \times 10^{-3}, \quad \xi_{BO} = 0,5, \quad K_{BF} = 8,3 \times 10^{-3}, \quad \omega_{0BF} = 71,9 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, \quad \xi_{BF} = 0,5.$$

Q 18. Déterminer la valeur en % du premier dépassement et conclure au regard de l'exigence Id = 1.1.1.1.2.

Q 19. Déterminer l'expression de l'erreur d'accélération en régime permanent ε_a suite à une entrée de type échelon en accélération d'amplitude 0,3g en fonction de K_{BO} . Faire l'application numérique.

Q 20. En déduire l'erreur relative en % et conclure sur l'exigence Id = 1.1.1.2.1.

III.B – Introduction d'une correction

— Objectif —

Pour pallier le non-respect de certaine(s) performance(s) du diagramme des exigences (figure A) sur le modèle n°1 (figure 20), le bureau d'études a choisi de mettre en place un correcteur dans la chaîne directe, ou chaîne d'action. L'objectif est de valider le choix du correcteur ainsi que son dimensionnement.

III.B.1) Réglage d'un correcteur proportionnel vis-à-vis du critère de précision

Q 21. À partir de l'expression de ε_a déterminée à la question 19 montrer qu'un correcteur proportionnel de gain pur $K_{\text{corr.gain.pur}}$ placé dans la chaîne directe, ou chaîne d'action, permet d'améliorer l'erreur relative observée à la question 20.

Q 22. Déterminer la valeur de $K_{\text{corr.gain.pur}}$ permettant d'atteindre l'exigence Id = 1.1.1.2.1.

III.B.2) Réglage d'un correcteur proportionnel vis-à-vis du critère de dépassement

Q 23. À partir de l'expression de ξ_{BF} déterminée à la question 17, montrer qu'un correcteur proportionnel de gain pur $K_{\text{corr.gain.pur}}$ placé dans la chaîne directe, ou chaîne d'action, a une influence sur le dépassement observé à la question 18. Préciser alors le sens de variation du dépassement en fonction du gain $K_{\text{corr.gain.pur}}$.

Q 24. Vérifier si l'exigence Id = 1.1.1.1.2 est respectée avec la valeur de $K_{\text{corr.gain.pur}}$ déterminée à la question 22.

III.B.3) Choix et réglage d'un correcteur proportionnel-intégral

Le correcteur choisi par les ingénieurs du bureau d'études est un correcteur proportionnel-intégral, noté PI, de la forme

$$C(p) = K_{\text{corr}} \left(\frac{1 + T_{\text{corr}}p}{T_{\text{corr}}p} \right) = K_{\text{corr}} \left(1 + \frac{1}{T_{\text{corr}}p} \right) = K_{\text{corr}} \left(1 + \frac{\omega_{\text{corr}}}{p} \right).$$

Q 25. À l'aide des sections III.B.1 et III.B.2, indiquer en quoi l'utilisation d'un correcteur proportionnel n'est pas suffisante dans le cas du Sled. Justifier le choix d'un correcteur proportionnel-intégral.

Q 26. Tracer sur la copie le diagramme asymptotique de la phase du diagramme de Bode théorique du correcteur proportionnel-intégral. Préciser ses caractéristiques principales. Compléter le diagramme asymptotique de la phase avec l'allure du diagramme réel de phase du correcteur.

Dans un premier temps, le bureau d'études souhaite régler le correcteur proportionnel-intégral afin que le modèle n°1 corrigé puisse atteindre les performances de stabilité définies dans le diagramme des exigences (figure A). Pour cela, il utilise un programme codé en Python (figure 10).

```

1  import numpy as np
2  def H_BO_nc(Omega):
3      # Définition de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée
4      K_BO      = 8.4e-3 # gain en boucle ouverte non corrigée
5      omega0_BO = 71     # pulsation propre en boucle ouverte non corrigée
6      Xi_BO     = 0.5    # facteur d'amortissement en boucle ouverte non corrigée
7      u = Omega/omega0_BO # pulsation réduite
8      FTBO_nc = K_BO/(1 + 2*Xi_BO*(1j*u) - u**2)
9      return FTBO_nc
10
11 def reglage_PI(H_BO_nc,M_phi):
12     # Détermination des paramètres du correcteur P.I. à l'aide de deux paramètres :
13     # H_BO_nc : Fonction de transfert en BO du système non corrigé
14     # M_phi : Marge de phase souhaitée après réglage du correcteur
15     epsilon=0.5
16     pas = 0.001
17     Omega= 10**np.arange(0,3+pas,pas) # Pulsation de 10^0 à 10^3 en rad.s-1
18     GdB_BO_nc = 20*np.log10(np.absolute(H_BO_nc(Omega))) # Gain en dB de la fonction
19     # en BO non corrigée
20     Phi_BO_nc = np.angle(H_BO_nc(Omega),'deg') # Phase en ° de la fonction
21     # en BO non corrigée
22     Phi_recherchée_avant_correction= M_phi - 180 + 5.7
23     i=0
24     while i<len(Phi_BO_nc) and abs(Phi_BO_nc[i]-Phi_recherchée_avant_correction)>epsilon:
25         i=i+1
26     if i!=len(Phi_BO_nc):
27         Omega_corr=Omega[i]/10 # Calcul de la pulsation de cassure du correcteur
28         T_corr=1/Omega_corr # Calcul de la constante de temps du correcteur
29         K_corr=10**(-GdB_BO_nc[i]/20)# Calcul du gain du correcteur
30         return K_corr,T_corr

```

Figure 10 Code python de détermination du réglage du correcteur PI

Notations

- $\Phi(H_{BOnc}(\omega_{c\ 0dB}))$ la phase de la boucle ouverte non corrigée à la pulsation de coupure à 0 dB.
- $\Phi(H_{BO}(\omega_{c\ 0dB}))$ la phase souhaitée de la boucle ouverte corrigée à la pulsation de coupure à 0 dB.
- MP la marge de phase souhaitée après correction.

Q 27. Exprimer $\Phi(H_{BO}(\omega_{c\ 0dB}))$ en fonction de MP .

Q 28. Exprimer $\Phi(H_{BO}(\omega_{c\ 0dB}))$ en fonction de $\Phi(H_{BOnc}(\omega_{c\ 0dB}))$, de T_{corr} et de $\omega_{c\ 0dB}$.

Q 29. En déduire l'expression de $\Phi(H_{BOnc}(\omega_{c\ 0dB}))$ en fonction de MP , de T_{corr} et de $\omega_{c\ 0dB}$.

Q 30. Préciser comment est déterminée la pulsation de cassure du correcteur dans la méthode décrite dans le code Python de la figure 10 (ligne 26).

À l'aide de l'étude précédente menée sur la correction :

Q 31. retrouver la valeur $5,7^\circ$ utilisée ligne 21 dans la méthode décrite dans le code Python de la figure 10 ;

Q 32. représenter cette valeur sur le tracé du diagramme de Bode de la phase du correcteur PI (question 26) et indiquer à quoi correspond cette valeur.

En utilisant la méthode de réglage du correcteur décrite dans le code Python (figure 10), les paramètres du correcteur ont été déterminés. Les ingénieurs ont retenu les valeurs $K_{corr} = 354$ et $T_{corr} = 1/15\text{ s} = 0,066\text{ s}$. La figure 11 représente le diagramme de Bode de la boucle ouverte de l'asservissement en vitesse du modèle n°1 ainsi corrigé.

III.B.4) Validation des exigences

La réponse temporelle en accélération, du modèle n°1 corrigé, en réponse à la consigne d'accélération définie figure 4 est donnée sur la figure 12.

Q 33. Évaluer graphiquement la marge de phase du système corrigé et conclure au regard de l'exigence Id = 1.1.1.1.1.

Q 34. Évaluer le premier dépassement suite à l'échelon de consigne de $0,3g$ et conclure au regard de l'exigence $Id = 1.1.1.1.2$.

Q 35. Conclure, en justifiant, au regard de l'exigence $Id = 1.1.1.2.1$.

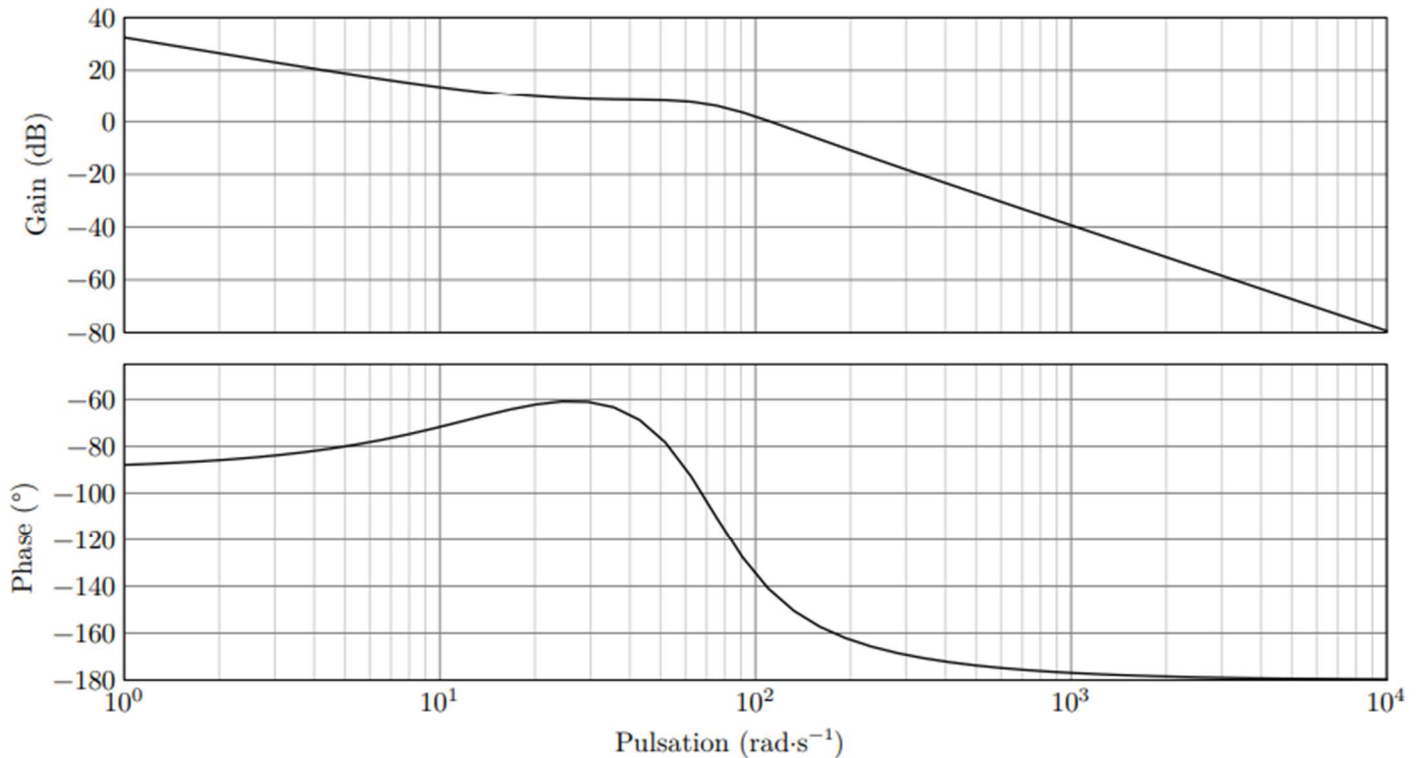


Figure 11 Diagramme de Bode de la boucle ouverte de l'asservissement en vitesse avec correction

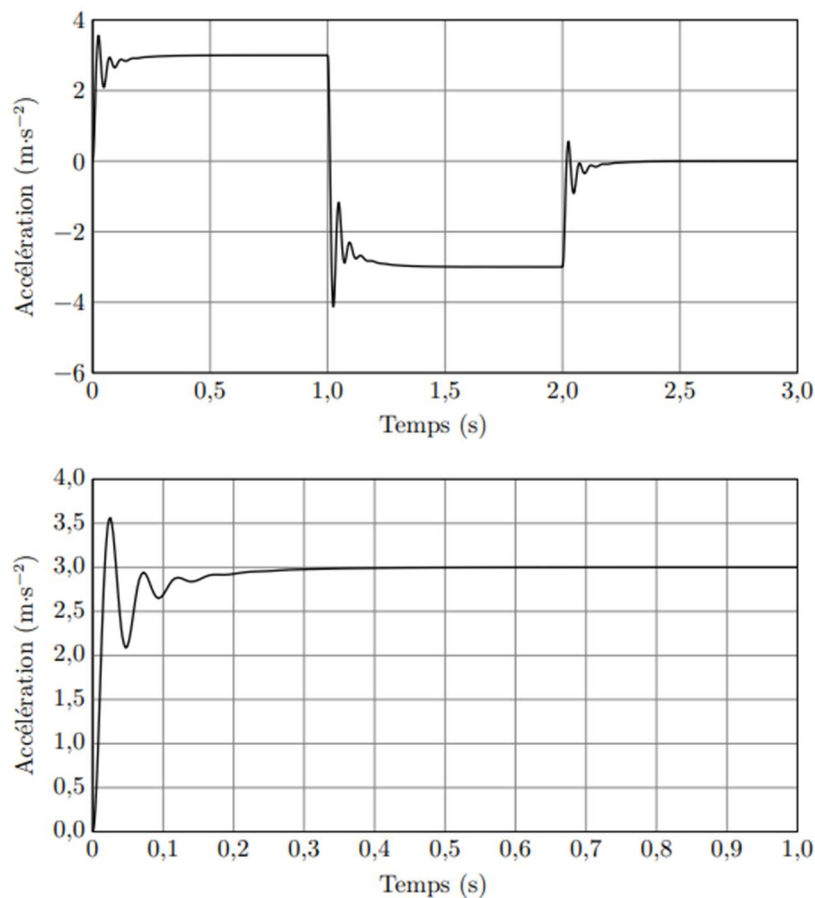


Figure 12 Réponse temporelle en accélération du système corrigé (au-dessus) et zoom (en dessous) sur l'échelon de consigne $0,3g$

Les ingénieurs du bureau d'études décident d'arrêter en l'état la modélisation du Sled $0,3g$ qui a permis de définir une première structure de commande. Ils souhaitent à présent s'investir dans la réalisation d'un Sled et mener des expérimentations.

IV. Réalisation d'un SLED 0,3g

En tenant compte des résultats du prédimensionnement et de la modélisation, un prototype du Sled 0,3g a été réalisé par le bureau d'études et mis en place dans le laboratoire d'expérimentations (figure 13). Les résultats obtenus avec ce prototype devront vérifier les exigences définies dans le diagramme (figure A). Ils pourront également être confrontés aux résultats issus de la modélisation. Cela permettra, à terme, de faire évoluer à la fois le modèle numérique et le prototype.

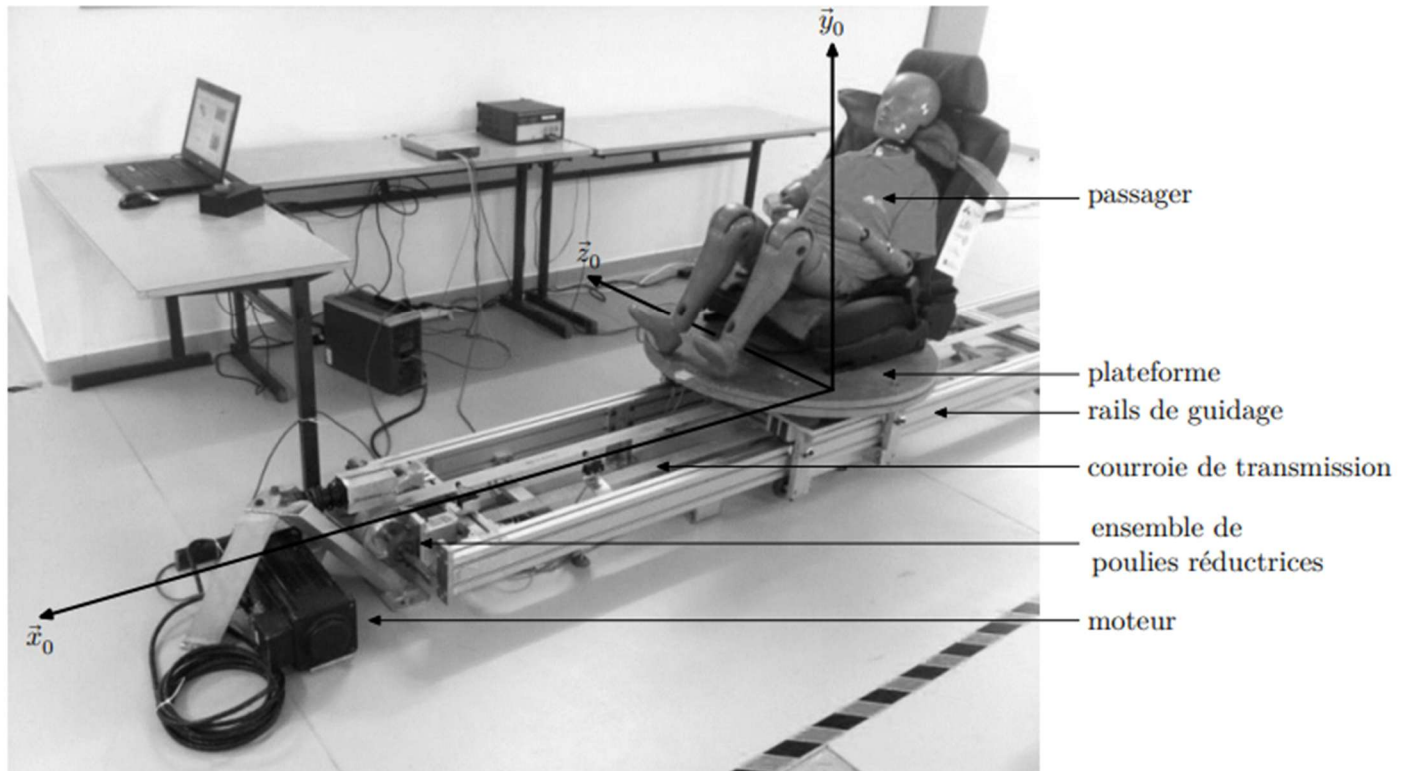


Figure 13 Prototype du Sled (ou dispositif expérimental) à 0,3g

Hypothèses d'étude

Compte tenu des dimensions du Sled définies lors du prédimensionnement, la chaîne de transmission de puissance du moteur à l'ensemble mobile S a été conçue et réalisée avec un système de poulies et de courroies comme représenté sur la figure 14.

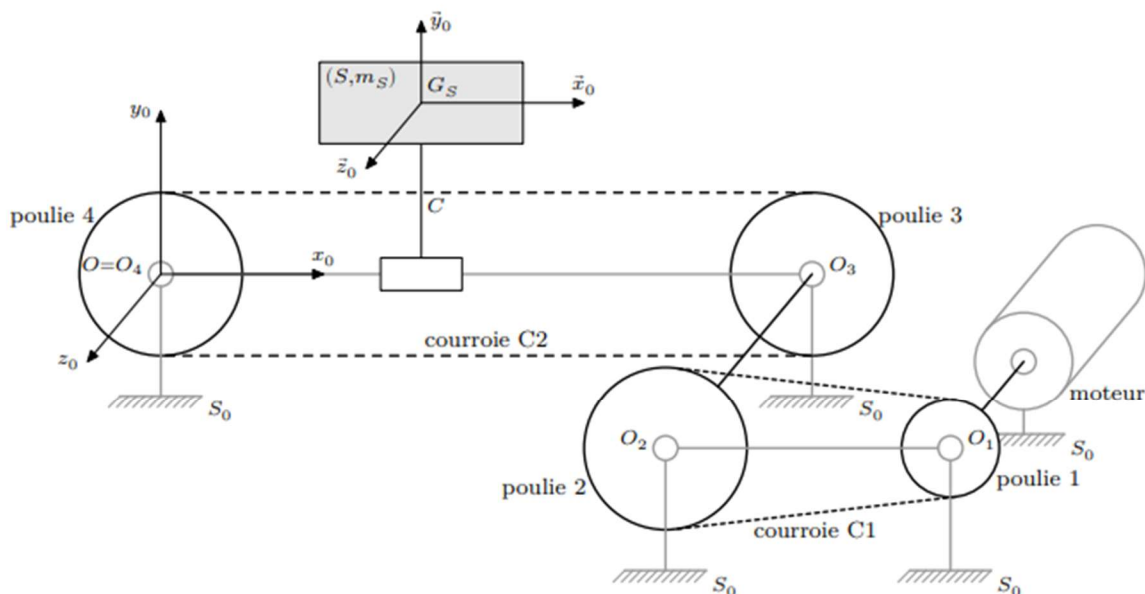


Figure 14 Modélisation cinématique de la chaîne de transmission de puissance du prototype du Sled

Les poulies 1, 2 et la courroie C1 réalisent une adaptation de la vitesse de rotation en sortie du moteur électrique. Les poulies 3, 4 et la courroie C2 participent à la transformation de mouvement de rotation des poulies en mouvement de translation de l'ensemble mobile S .

Notations et données

- m_S , masse de l'ensemble mobile $S = \{\text{volontaire} + \text{siège} + \text{plateforme} + \text{capteurs}\}$.
- t , le temps, exprimé en secondes.
- $\vec{V}_{(G_S, S/S_0)} = v(t)\vec{x}_0$, la vitesse de déplacement du centre de gravité G_S de l'ensemble mobile S par rapport au bâti S_0 .
- $\vec{\Omega}_{(P_1/S_0)} = \omega_1(t)\vec{z}_0$, la vitesse angulaire de rotation d'axe (O_1, \vec{z}_0) du sous-ensemble P_1 par rapport au bâti S_0 .
- $\vec{\Omega}_{(P_2/S_0)} = \omega_2(t)\vec{z}_0$, la vitesse angulaire de rotation de ce sous-ensemble P_2 par rapport au bâti S_0 autour de l'axe de rotation (O_2, \vec{z}_0) .
- $D_2 = D_3 = D_4 = 100$ mm, les diamètres des poulies 2, 3 et 4.
- $D_1 = 35$ mm, le diamètre de la poulie 1.
- La masse et le moment d'inertie de la courroie C1 sont négligés.

Q 36. Déterminer le rapport $k = \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}$.

Q 37. Déterminer $v(t)$ en fonction de $\omega_1(t)$ et d'un paramètre géométrique. Préciser les hypothèses nécessaires à la détermination de k et de la relation entre $v(t)$ et $\omega_1(t)$.

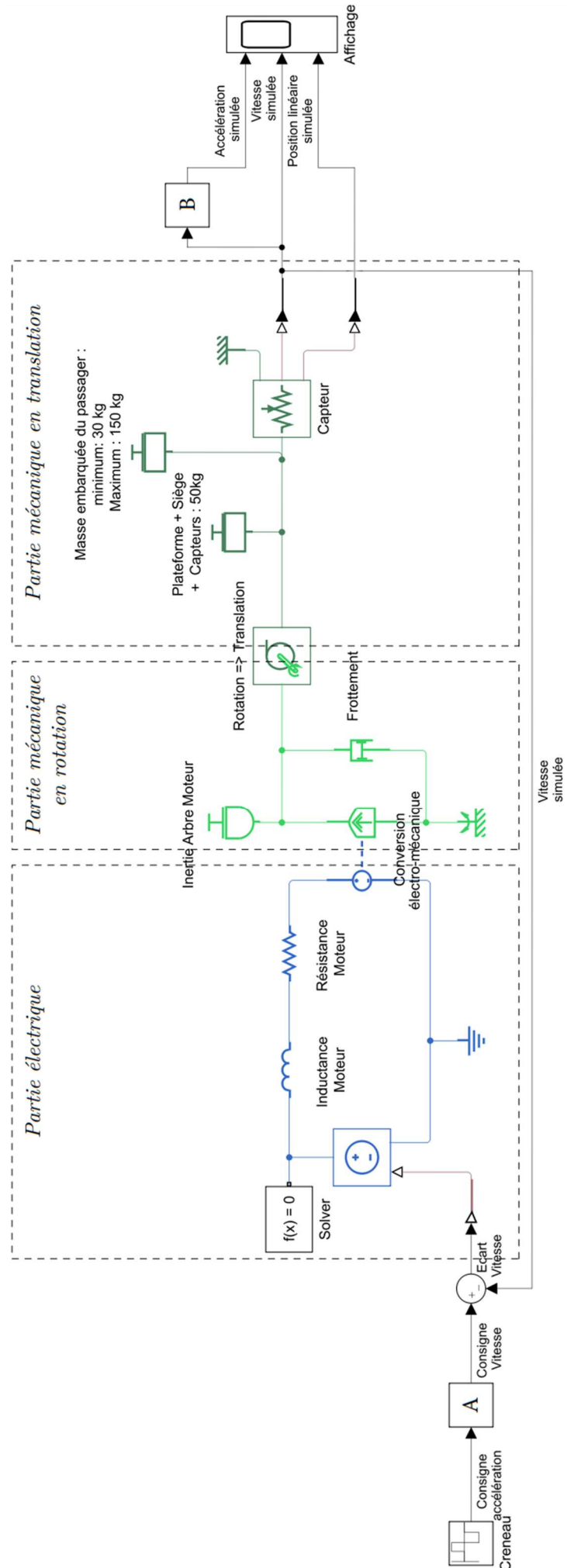


Figure 20 Modèle n°1 du Sled

