

**Pince de robot** (d'après X-ENS PSI 2017) **Corrigé**

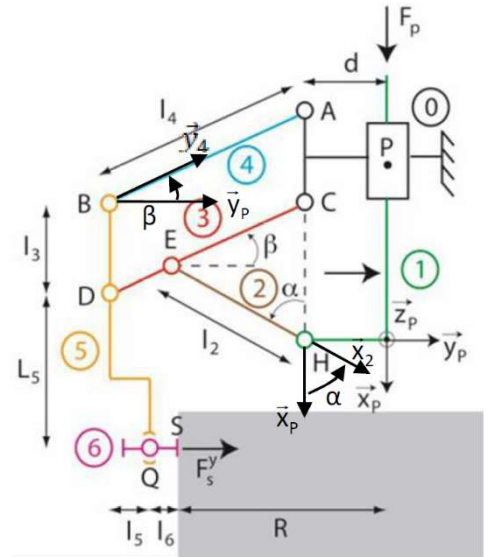
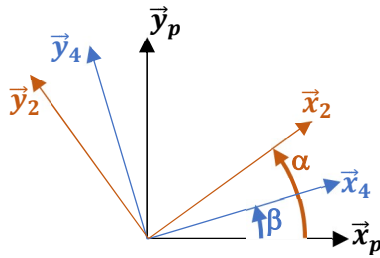
**Q.1.** Dans le triangle isocèle CEH on a  $2.\alpha + 2.\beta = \pi$

$\rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  ou  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

En projection sur  $\vec{y}_p$  on a :  $R + l_6 + l_5 - l_4 \cdot \cos\beta - d = 0$

Et  $R + l_6 + l_5 - l_4 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) - d = 0$

$\rightarrow R + l_6 + l_5 - l_4 \cdot \sin\alpha - d = 0$



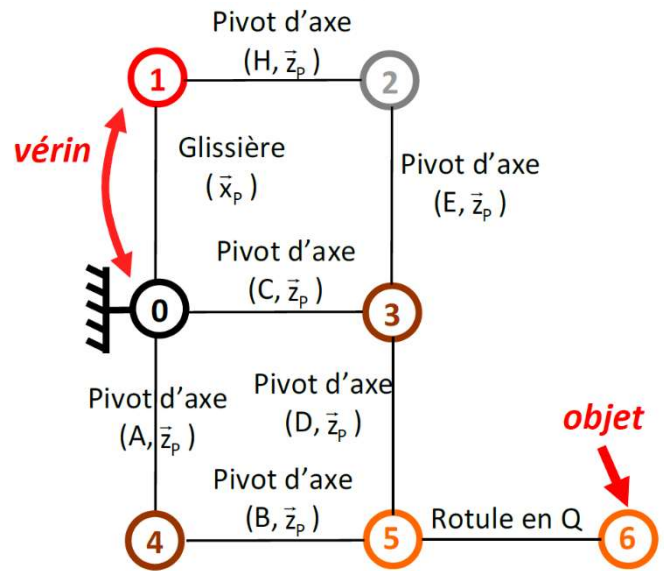
**Q.2.** On fait l'hypothèse problème plan.

Le solide 2 est soumis à 2 glisseurs, ces 2 glisseurs sont directement opposés et de norme égale. Direction glisseur = (EH). Notons :

$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{R}_{3 \rightarrow 2} = R_{12} \cdot \vec{x}_2$

Le solide 4 est soumis à 2 glisseurs, ces 2 glisseurs sont directement opposés et de norme égale. Direction glisseur = (BA). Notons :

$\vec{R}_{0 \rightarrow 4} = -\vec{R}_{5 \rightarrow 4} = R_{04} \cdot \vec{y}_4$



**Q.2.** On isole 5+6.

BAME :  $\{T_{\text{objet} \rightarrow 6}\}_S = \begin{Bmatrix} F_x \cdot \vec{x}_p - F_y \cdot \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$  ;  $\{T_{3 \rightarrow 5}\}_D = \begin{Bmatrix} X_{35} & - \\ Y_{35} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B_p}$  ;  $\{T_{4 \rightarrow 5}\}_B = \begin{Bmatrix} R_{04} \cdot \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

TMS en D projeté sur  $\vec{z}_p$  :

$[\overline{DS} \wedge (F_x \cdot \vec{x}_p - F_y \cdot \vec{y}_p) + \overline{DB} \wedge R_{04} \cdot \vec{y}_4] \cdot \vec{z}_p = 0$   
 $[(L_5 \cdot \vec{x}_p + (l_5 + l_6) \cdot \vec{y}_p) \wedge (F_x \cdot \vec{x}_p - F_y \cdot \vec{y}_p) + (-l_3 \cdot \vec{x}_p) \wedge R_{04} \cdot \vec{y}_4] \cdot \vec{z}_p = 0$   
 $-L_5 F_y - (l_5 + l_6) F_x - l_3 R_{04} \cos\beta = 0$

On isole 3+5+6.

BAME :  $\{T_{\text{objet} \rightarrow 6}\}_S = \begin{Bmatrix} F_x \cdot \vec{x}_p - F_y \cdot \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$  ;  $\{T_{0 \rightarrow 3}\}_C = \begin{Bmatrix} X_{03} & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B_p}$  ;  $\{T_{4 \rightarrow 5}\}_B = \begin{Bmatrix} R_{04} \cdot \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$  ;  $\{T_{2 \rightarrow 3}\}_E = \begin{Bmatrix} R_{12} \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

TMS en C projeté sur  $\vec{z}_p$  :

$[\overline{CS} \wedge (F_x \cdot \vec{x}_p - F_y \cdot \vec{y}_p) + \overline{CB} \wedge R_{04} \cdot \vec{y}_4 + \overline{CE} \wedge (R_{12} \cdot \vec{x}_2)] \cdot \vec{z}_p = 0$

On peut remarquer que suite à l'isolement précédent, on peut simplifier cette expression à l'aide du théorème de Chasles sur les vecteurs  $\overline{CS} = \overline{CD} + \overline{DS}$  et  $\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB}$ . Soit :

$[\overline{CD} \wedge (F_x \cdot \vec{x}_p - F_y \cdot \vec{y}_p) + \overline{CD} \wedge R_{04} \cdot \vec{y}_4 + \overline{CE} \wedge (R_{12} \cdot \vec{x}_2)] \cdot \vec{z}_p = 0$

$$[-l_4 \cdot \vec{y}_4 \wedge (F_x \cdot \vec{x}_p - F_y \cdot \vec{y}_p) + (-l_4 \cdot \vec{y}_4) \wedge R_{04} \cdot \vec{y}_4 + (-l_2 \cdot \vec{y}_4) \wedge (R_{12} \cdot \vec{x}_2)] \cdot \vec{z}_p = 0$$

$$l_4(F_x \cos \beta - F_y \sin \beta) + l_2 R_{12} \cos(\alpha - \beta) = 0$$

D'où :

$$R_{12} = -\frac{l_4(F_x \cos \beta - F_y \sin \beta)}{l_2 \cos(\alpha - \beta)}$$

On isole 1.

$$\text{BAME : } \{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{03} & - \\ - & N_{03} \end{Bmatrix}_P ; \{T_{0 \xrightarrow{\text{vérin}} 1}\} = \begin{Bmatrix} F_p \cdot \vec{x}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P ; \{T_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -R_{12} \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$$

TRS projeté sur  $\vec{x}_p$  :

$$F_p - R_{12} \cdot \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_p = 0$$

$$F_p = R_{12} \cdot \cos \alpha$$

En combinant avec l'expression de E obtenue grâce à l'isolement précédent, on obtient :

$$F_p = -\frac{l_4(F_x \cos \beta - F_y \sin \beta)}{l_2 \cos(\alpha - \beta)} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Or } \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \text{ donc } \cos \alpha = \sin \beta \text{ et } \cos(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta$$

On obtient donc :

$$F_p = -\frac{l_4(F_x \cos \beta - F_y \sin \beta)}{2l_2 \cos \beta}$$

Finalement :

$$F_p = -\frac{l_4}{2l_2} (F_x - F_y \tan \beta)$$

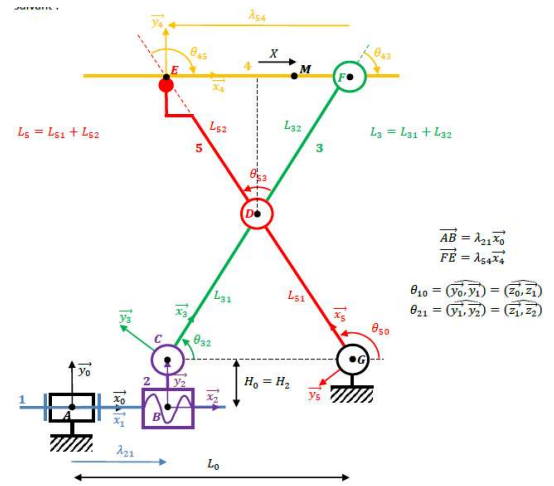
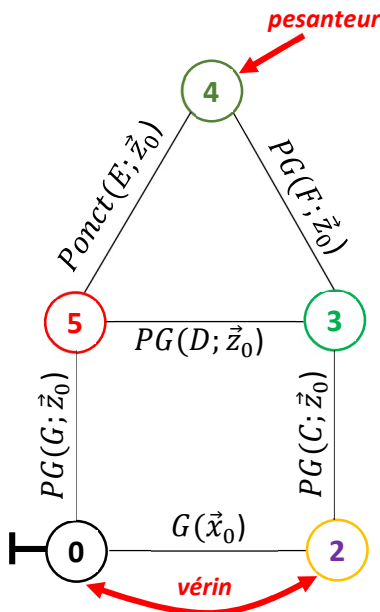
**Plateforme élévatrice pour PMR**

**Corrigé**

Afin de respecter la modélisation plane, on considère une liaison glissière entre le solide 2 et le bâti dont le mouvement est commandé par un vérin fournissant un effort  $F$ .  $\vec{x}_0$ .

Le couple qu'exercera le moteur sur le système réel sera donc :  $C_m = \frac{pas}{2\pi} \cdot F$  où pas est le pas de la liaison hélicoïdale.

Graphes d'analyse :



Stratégie d'isolement :

Étape	Isolement	Théorème	Projection	Résultat
1	4	TMS en F	Sur $\vec{z}_0$	$R_{5 \rightarrow 4} = f(R_{pes \rightarrow 4})$
2	3+4	TMS en D	Sur $\vec{z}_0$	$R_{2 \rightarrow 3} = f(R_{pes \rightarrow 4})$
Un deuxième isolement est nécessaire pour connaître $R_{2 \rightarrow 3}$ car cet effort possède 2 composantes dans $B_0$				
3	3+4+5	TMS en G	Sur $\vec{z}_0$	$R_{2 \rightarrow 3} = f(R_{pes \rightarrow 4})$
Suite aux isoléments 2 et 3, nous disposons de 2 équations indépendantes dans lesquelles les seules inconnues statiques sont $X_{23}$ et $Y_{23}$ : $R_{2 \rightarrow 3}$ est donc connue				
4	2	TRS	Sur $\vec{x}_0$	$F = f(R_{2 \rightarrow 3})$

1) On isole 4.

$$BAME : \{T_{pes \rightarrow 4}\} = \begin{matrix} -Mg \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}_M ; \{T_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{matrix} X_{34} & - \\ Y_{34} & - \\ - & 0 \end{matrix}_{B_0} ; \{T_{5 \rightarrow 4}\} = \begin{matrix} Y_{54} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}_E$$

TMS en F projeté sur  $\vec{z}_0$  :

$$[\overline{FM} \wedge (-Mg \cdot \vec{y}_0) + \overline{FE} \wedge Y_{54} \cdot \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\left[ \left( \frac{\lambda_{54}}{2} + X \right) \cdot \vec{x}_0 \wedge (-Mg \cdot \vec{y}_0) + \lambda_{54} \cdot \vec{x}_0 \wedge Y_{54} \cdot \vec{y}_0 \right] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\boxed{-\left( \frac{\lambda_{54}}{2} + X \right) Mg + \lambda_{54} \cdot Y_{54} = 0} \quad (1)$$

2) On isole 3+4.

$$BAME : \{T_{pes \rightarrow 4}\} = \begin{matrix} -Mg \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}_M ; \{T_{5 \rightarrow 4}\} = \begin{matrix} Y_{54} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}_E ; \{T_{5 \rightarrow 3}\} = \begin{matrix} X_{53} & - \\ Y_{53} & - \\ - & 0 \end{matrix}_{B_0} ; \{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{matrix} X_{23} & - \\ Y_{23} & - \\ - & 0 \end{matrix}_{B_0}$$

TMS en D projeté sur  $\vec{z}_0$  :

$$[\overline{DM} \wedge (-Mg \cdot \vec{y}_0) + \overline{DE} \wedge Y_{54} \cdot \vec{y}_0 + \overline{DC} \wedge (X_{23} \cdot \vec{x}_0 + Y_{23} \cdot \vec{y}_0)] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

On peut remarquer que suite à l'isolement précédent, on peut simplifier cette expression à l'aide du théorème de Chasles sur les vecteurs  $\overline{DM} = \overline{DF} + \overline{FM}$  et  $\overline{DE} = \overline{DF} + \overline{FE}$ . Soit :

$$[\overline{DF} \wedge (-Mg \cdot \vec{y}_0) + \overline{DF} \wedge Y_{54} \cdot \vec{y}_0 + \overline{DC} \wedge (X_{23} \cdot \vec{x}_0 + Y_{23} \cdot \vec{y}_0)] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$[L_{32} \cdot \vec{x}_3 \wedge (-Mg + Y_{54}) \cdot \vec{y}_0 - L_{32} \cdot \vec{x}_3 \wedge (X_{23} \cdot \vec{x}_0 + Y_{23} \cdot \vec{y}_0)] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\boxed{(-Mg + Y_{54} - Y_{23}) \cos \theta_{32} + X_{23} \sin \theta_{32} = 0} \quad (2)$$

3) On isole 3+4+5.

$$\text{BAME} : \{T_{\text{pes} \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} -Mg \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M ; \{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & - \\ Y_{23} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} ; \{T_{0 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X_{05} & - \\ Y_{05} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

TMS en G projeté sur  $\vec{z}_0$  :

$$[\overline{GM} \wedge (-Mg \cdot \vec{y}_0) + \overline{GC} \wedge (X_{23} \cdot \vec{x}_0 + Y_{23} \cdot \vec{y}_0)] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$[(\overline{GC} + \overline{CF} + \overline{FM}) \wedge (-Mg \cdot \vec{y}_0) + \overline{GC} \wedge (X_{23} \cdot \vec{x}_0 + Y_{23} \cdot \vec{y}_0)] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\left[ (\lambda_{54} \cdot \vec{x}_0 + 2L_{32} \cdot \vec{x}_3 + \left(\frac{\lambda_{54}}{2} + X\right) \cdot \vec{x}_0) \wedge (-Mg \cdot \vec{y}_0) + \lambda_{54} \cdot \vec{x}_0 \wedge (X_{23} \cdot \vec{x}_0 + Y_{23} \cdot \vec{y}_0) \right] \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$-Mg \cdot \left( \frac{3\lambda_{54}}{2} + X + 2L_{32} \cos\theta_{32} \right) + \lambda_{54} Y_{23} = 0$$

$$\text{Or } \cos\theta_{32} = -\frac{\lambda_{54}}{2L_{32}} \text{ donc}$$

$$-Mg \cdot \left( \frac{\lambda_{54}}{2} + X \right) + \lambda_{54} Y_{23} = 0 \quad (3)$$

4) On isole 2.

$$\text{BAME} : \{T_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A ; \{T_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{02} & - \\ - & N_{02} \end{Bmatrix}_{B_0} ; \{T_{3 \rightarrow 2}\} = -\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -X_{23} & - \\ -Y_{23} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

TRS projeté sur  $\vec{x}_0$  :

$$F - X_{23} = 0 \quad (4)$$

Finalement :

$$(1) \Rightarrow Y_{54} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_{54}} X \right) Mg$$

$$(3) \Rightarrow Y_{23} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_{54}} X \right) Mg$$

*NB : on remarque que les efforts verticaux en E et C sont égaux...*

$$(4) \Rightarrow X_{23} = F$$

En remplaçant  $Y_{54}$ ,  $Y_{23}$  et  $X_{23}$  par leurs expressions ci-dessus dans l'équation (2) on obtient :

$$-Mg \cdot \cos\theta_{32} + F \cdot \sin\theta_{32} = 0 \quad \text{soit,}$$

$$F = \frac{Mg}{\tan\theta_{32}}$$

Finalement, le couple que devra exercer le moteur électrique sur le système réel afin de maintenir l'ensemble à l'équilibre sera :

$$C_m = \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \frac{Mg}{\tan\theta_{32}}$$

On remarque que ce couple est indépendant de la position de la masse M sur la plateforme 4.